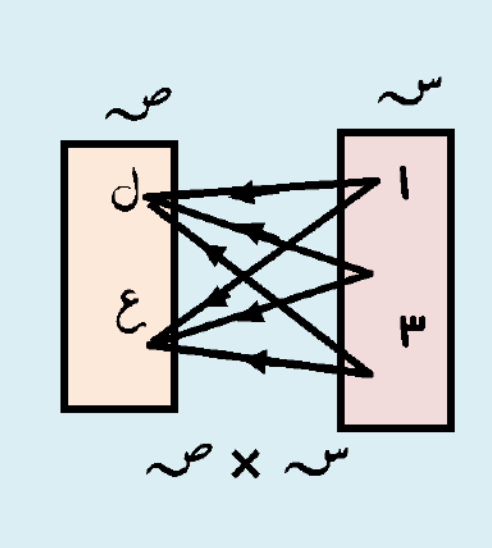
المتميز



فى الرياضيات

< > + =

إعداد : أحمد الشنتورى

الصف الثالث الإعدادى
الفصل الدراسى الأول

٢٠١٦ / ٢٠١٧

بسم الله الرحمن الرحيم

أحمد الله و اشكره و أثنى عليه أن أعاننى

و وفقنى لتقديم هذا الكتاب من مجموعة

" المتميز "

فى الرياضيات لأقدمه لأبنائى المتعلمين

و إخوانى المعلمين و الذى راعيت فيه

تقديم المادة العلمية بطريقة مبسطة و ممتعة

مدللاً بأمثلة محلولة ثم تدريبات متنوعة و متدرجة

للتدريب على كيفية الحل لتناسب كل المستويات

و مرفق حلولها كاملة في آخر الكتاب

متمنياً أن ينال رضاكم و ثقتكم التى أعتز بها

و الله لا يضيع أجر من أحسن عملا

و هو ولى التوفيق

أحمد الشنتورى

المحتويات

الوحدة الأولى العلاقات و الدوال

الدرس الأول : حاصل الضرب الديكارتى

تمهيد : نعلم أن :

العلاقة : ٮ س + ب ص = حـ حيث : ٮ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠

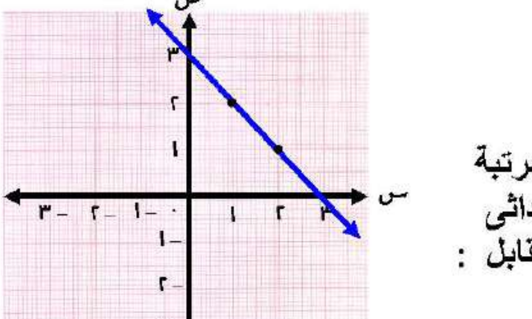
تسمى علاقة خطية بين المتغيرين س ، ص ، و يمكن إيجاد مجموعة من الأزواج المرتبة (س ، ص) تحقق هذه العلاقة

فمثلاً : لدراسة العلاقة : س + ص = ٣

نوجد الأزواج المرتبة بوضع قيمة س و إيجاد قيمة ص المناظرة أو العكس و يمكن وضعها فى جدول كما يلى :

س	٠	١	٢
ص	٣	٢	١

و تمثل هذه الأزواج المرتبة بيانياً في المستوى الإحداثى المتعامد كما بالشكل المقابل :



ملاحظات :

١) كل زوج مرتب يحدد نقطة واحدة في المستوى ، أى أن كل زوج مرتب يناظر نقطة واحدة و واحدة فقط فى المستوى الإحداثى

٢) لاحظ الفرق بين (١ ، ٢) ، (٢ ، ١) و موضع النقطة التى يحددها كل منهما فى المستوى الإحداثى و يكون :
(١ ، ٢) ≠ (٢ ، ١)

مما سبق نلاحظ :

١) فى الزوج المرتب (ٮ ، ب) يسمى : ٮ بالمسقط الأول ، ب بالمسقط الثانى

٢) إذا كان : ٮ ≠ ب فإن : (ٮ ، ب) ≠ (ب ، ٮ)

٣) إذا كان : (س ، ص) = (ٮ ، ب)
فإن : س = ٮ ، ص = ب

فمثلاً :

١] إذا كان : (س ، ص) = (١ ، ٤) فإن : س = ١ ، ص = ٤

٢] إذا كان : (س + ١ ، ص − ٣) = (٢ ، ٦)
فإن : س + ١ = ٢ و منها : س = ١
، ص − ٣ = ٦ و منها : ص = ٩

(١) أوجد قيمة س ، ص فى كل مما يلى :

[١] (س + ٤ ، ٣) = (٨ ، ص − ١)

[٢] (س^{٢} + ١ ، ٢٦) = (٥ ، ص^{٣} − ١)

[٣] (س ، ∛٨) = (√٩ ، ص + ٢)

أحمد الشتوى

حاصل الضرب الديكارتى لمجموعتين منتهيتين غير خالتين :

إذا كانت : س ، ص مجموعتين منتهيتين و غير خاليتين فإن :

١) الحاصل الديكارتى للمجموعة س فى المجموعة ص يعرف كما يلى :

س × ص (يقرأ س ضرب ص) هو مجموعة جميع الأزواج المرتبة التى مسقطها الأول ينتمى إلى س ، و مسقطها الثانى ينتمى إلى ص

أى أن : س × ص = {(أ ، ب) : أ ∈ س ، ب ∈ ص}

فمثلاً :

إذا كانت : س = { ل ، ع } ، ص = { ١ ، ٢ ، ٣ } فإن :

س × ص = {(ل ، ١) ، (ل ، ٢) ، (ل ، ٣) ، (ع ، ١) ، (ع ، ٢) ، (ع ، ٣)}

و يمكن الحصول على س × ص من الجدول التالى :

×		المسقط الثانى		
		١	٢	٣
المسقط الأول	ل	(ل ، ١)	(ل ، ٢)	(ل ، ٣)
	ع	(ع ، ١)	(ع ، ٢)	(ع ، ٣)

لاحظ أن :

إذا كانت : ن ترمز لعدد عناصر المجموعة فإن : ن (س) = ٢ ، ن (ص) = ٣

و يكون : ن (س × ص) = ن (س) × ن (ص) = ٢ × ٣ = ٦

(٢) س = { ١ ، ٢ ، ٤ } ، ص = { -١ ، ١ } أوجد :
س × ص ، ن (س × ص)

٢) الحاصل الديكارتى للمجموعة ص فى المجموعة س يعرف كما يلى :

ص × س (يقرأ ص ضرب س) هو مجموعة جميع الأزواج المرتبة التى مسقطها الأول ينتمى إلى ص ، و مسقطها الثانى ينتمى إلى س

أى أن : ص × س = {(أ ، ب) : أ ∈ ص ، ب ∈ س}

فمثلاً :

إذا كانت : س = { ل ، ع } ، ص = { ١ ، ٢ ، ٣ } فإن :

ص × س = {(١ ، ل) ، (١ ، ع) ، (٢ ، ل) ، (٢ ، ع) ، (٣ ، ل) ، (٣ ، ع)}

و يمكن الحصول على ص × س من الجدول التالى :

× أحمد الشنتورى		المسقط الثانى	
		ل	ع
المسقط الأول	١	(١ ، ل)	(١ ، ع)
	٢	(٢ ، ل)	(٢ ، ع)
	٣	(٣ ، ل)	(٣ ، ع)

لاحظ أن :

ن (س) = ٣ ، ن (ص) = ٢

و يكون : ن (ص × س) = (ن (س) × ن (ص) = ٣ × ٢ = ٦

(٣) س = { ١ ، ٢ ، ٤ } ، ص = { -١ ، ١ } أوجد :
ص × س ، ن (ص × س)

ملاحظات :

١) س × ص ≠ ص × س حيث : س ≠ ص

٢) ن (س × ص) = ن (ص × س) = ن (س) × ن (ص)

٣) إذا كان : (ل ، م) ∈ س × ص

فإن : ل ∈ س ، م ∈ ص بشرط أن : ل ∉ ص ، م ∉ س

٣) الحاصل الديكارتى للمجموعة س على نفسها يعرف كما يلى :

س × س (يقرأ س ضرب س) ، (و يرمز له بالرمز : س^{٢}) ، (و يقرأ س اثنين) هو مجموعة جميع الأزواج المرتبة التى كل من مسقطها الأول و الثانى ينتمى إلى س

أى أن : س × س = س^{٢} = {(أ ، ب) : أ ، ب ∈ س }

فمثلاً :

إذا كانت : س = { ١ ، ٢ } فإن :

س^{٢} = {(١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٢)}

لاحظ أن :

ن (س^{٢}) = [ن (س)]^{٢} = (٢)^{٢} = ٤

(٤) س = { ١ ، ٢ ، ٤ } أوجد : س^{٢} ، ن (س^{٢})

تمثيل حاصل الضرب الديكارتى :

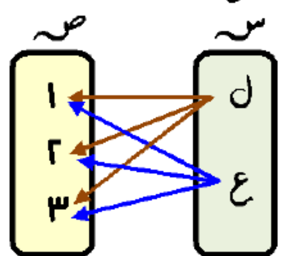
إذا كانت : س = { ل ، ع } ، ص = { ١ ، ٢ ، ٣ } فإن :

س × ص = {(ل ، ١) ، (ل ، ٢) ، (ل ، ٣) ، (ع ، ١) ، (ع ، ٢) ، (ع ، ٣)}

يمثل حاصل الضرب الديكارتى س × ص كما يلى :

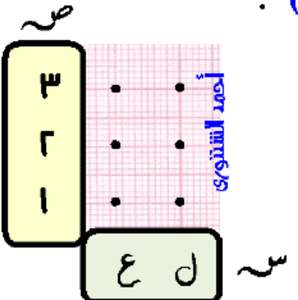
١) المخطط السهمى :

يمثل كل زوج مرتب بسهم يخرج من مسقطه الأول و ينتهى عند مسقطه الثانى كما بالشكل المقابل :



٢) المخطط البيانى (الشبكة البيانية المتعامدة) :

يمثل كل زوج مرتب بإحدى نقاط تقاطع الخطوط الأفقية التى تمثل المسقط الأول و الخطوط الرأسية التى تمثل المسقط الثانى كما بالشكل المقابل :



ملاحظة :

يمكن تمثيل حاصل الضرب الديكارتى س^{٢} أيضاً بمخطط سهمى و بمخطط بيانى

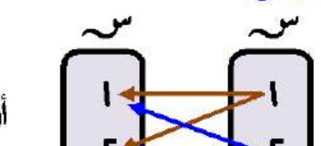
فمثلاً :

إذا كانت : س = { ١ ، ٢ } فإن :

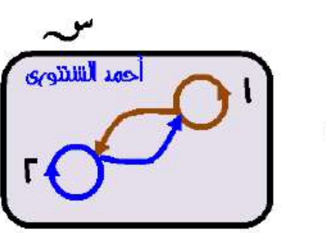
س^{٢} = {(١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٢)}

و يكون :

المخطط السهمى :



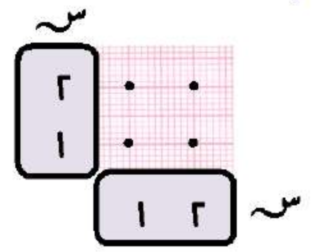
أو



ملاحظة :

الدائرة حول العنصر ١ تمثل (١ ، ١)

المخطط البيانى (الشبكة التربيعية البيانية) :



(٥) إذا كانت : س = { ١ ، ٢ } ، ص = { ٣ ، ٤ ، ٥ } أوجد :

س × ص ، ص × س ، س^{٢} و مثل كل منها بمخطط سهمى

(٦) إذا كانت : س = { – ٢ ، ٣ } ، ص = { ٠ ، ١ ، ٢ }

، ع = { ١ ، ٤ } أوجد : س × ص ، ص × ع ، ع^{٢}

و مثل كل منها بمخطط بيانى ثم أوجد : ن (س × ع)

، ن (س^{٢}) ، ن (ص^{٢})

(٧) إذا كانت : س~ = { ٣ ، ٤ } ، ص~ = { ٤ ، ٥ }
، ع = { ٦ ، ٥ } أوجد : س~ × (ص~ ∩ ع)
، (س~ − ص~) × ع ، (س~ − ص~) × (ص~ − ع)

(٨) إذا كان : س~ − ص~ = { ٢ } ، ص~ − س~ = { ٣ ، ٤ }
، س~ ∩ ص~ = { ٥ } أوجد : س~ ، ص~
، (س~ × ص~) ∩ (ص~ × س~)

(٩) إذا كان : س~ × ص~ = {(٢ ، ٦) ، (٢ ، ٩) ، (٣ ، ٦)
، (٣ ، ٩) ، (٥ ، ٦) ، (٥ ، ٩) }
أوجد كلاً من : س~ ، ص~ ، ص~ × س~

حاصل الضرب الديكارتى للمجموعات غير المنتهية و التمثيل البيانى له :

أولاً : تمثيل حاصل الضرب الديكارتى ط × ط :

حيث : ط × ط = { (س ، ص) : س ∈ ط ، ص ∈ ط }

١) نرسم مستقيمين متعامدين أحدهما س س/ أفقياً و الأخر ص ص/ رأسياً و متقاطعين فى النقطة (و)

٢) نمثل الأعداد الطبيعية ط على كل من المستقيمين الأفقى و الرأسى بدءاً من النقطة (و) التى تمثل العدد صفر

٣) نرسم مستقيمات أفقية و أخرى رأسية من النقط التى تمثل الأعداد الطبيعية لنحصل على الشكل المقابل :
و تكون نقط التقاطع لمجموعة لهذه المستقيمات ممثلة للشبكة البيانية المتعامدة ط × ط

ملاحظة :
كل نقطة من نقط هذه الشبكة تمثل أحد الأزواج المرتبة فى الحاصل الديكارتى ط × ط

فمثلاً :

النقطة أ تمثل الزوج المرتب (٤ ، ٣) ،

النقطة ب تمثل الزوج المرتب (٣ ، ٤) ،

النقطة حـ تمثل الزوج المرتب (٢ ، ٠) ،

النقطة ء تمثل الزوج المرتب (٠ ، ٥)

لاحظ أن : النقطة (و) تمثل الزوج المرتب (٠ ، ٠)

ثانياً : تمثيل حاصل الضرب الديكارتى صـ × صـ :

حيث : صـ × صـ = { (س ، ص) : س ∈ صـ ، ص ∈ صـ }

نمثل الأعداد الصحيحة صـ على كل من المستقيمين الأفقى و الرأسى حيث تمثل النقطة (و) الزوج المرتب (٠ ، ٠)

فتكون كل نقطة من نقط هذه الشبكة تمثل أحد الأزواج المرتبة فى الحاصل الديكارتى صـ × صـ و تعرف هذه الشبكة بالمستوى الإحداثى صـ × صـ و تمثل كما بالشكل التالى :

فمثلاً :

النقطة أ تمثل الزوج المرتب (٢ ، ٣) ،

النقطة ب تمثل الزوج المرتب (–٣ ، ٤) ،

النقطة حـ تمثل الزوج المرتب (– ٢ ، – ٣) ،

النقطة ء تمثل الزوج المرتب (٣ ، –٢)

ثالثاً : تمثيل حاصل الضرب الديكارتى ص × ص :

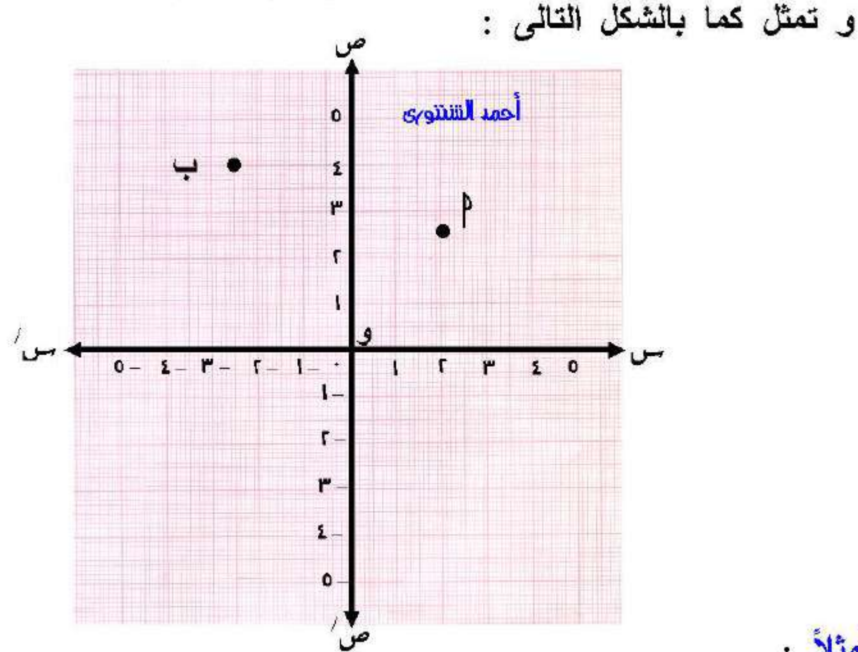
حيث : ص × ص = { (س ، ص) : س ∈ ص ، ص ∈ ص }

نمثل الأعداد الصحيحة ص على كل من المستقيمين الأفقى و الرأسى حيث تمثل النقطة (و) الزوج المرتب (٠ ، ٠)

فتكون كل نقطة من نقط هذه الشبكة تمثل أحد الأزواج المرتبة فى الحاصل الديكارتى ص × ص

و تعرف هذه الشبكة بالمستوى الإحداثى ص × ص

و تمثل كما بالشكل التالى :



فمثلاً :

النقطة أ تمثل الزوج المرتب (٢ ، ٢ $\frac{1}{2}$) ،

النقطة ب تمثل الزوج المرتب (- ٢ $\frac{1}{2}$ ، ٤) ،

رابعاً : تمثيل حاصل الضرب الديكارتى ح × ح :

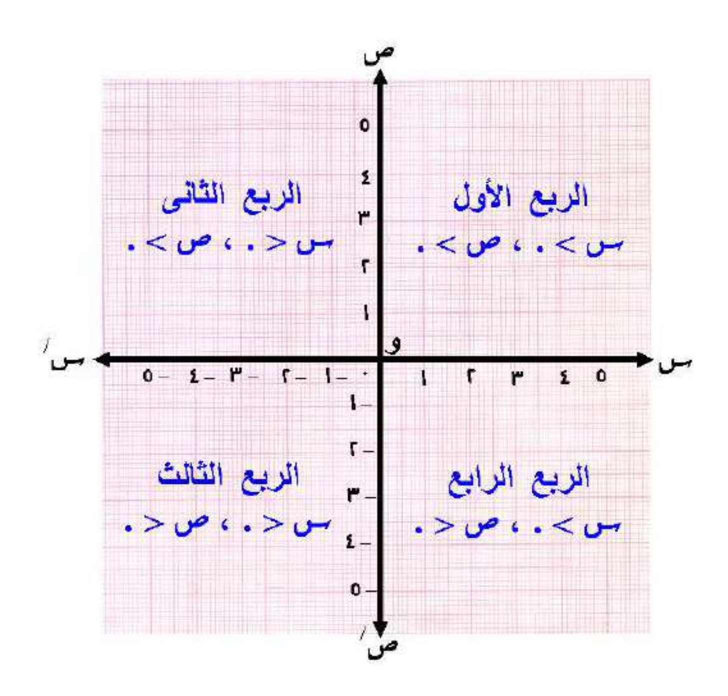
حيث : ح × ح = { (س ، ص) : س ∈ ح ، ص ∈ ح }

نمثل الأعداد الصحيحة ح على كل من المستقيمين الأفقى و الرأسى حيث تمثل النقطة (و) الزوج المرتب (٠ ، ٠)

فتكون كل نقطة من نقط هذه الشبكة تمثل أحد الأزواج المرتبة فى الحاصل الديكارتى ح × ح

و تعرف هذه الشبكة بالمستوى الإحداثى ح × ح

يسمى المستقيم الأفقى $\overleftrightarrow{\text{س س}'}$ محور السينات ، المستقيم الرأسى $\overleftrightarrow{\text{ص ص}'}$ محور الصادات فتنقسم الشبكة إلى أربعة أقسام (أرباع) كما بالشكل التالى :

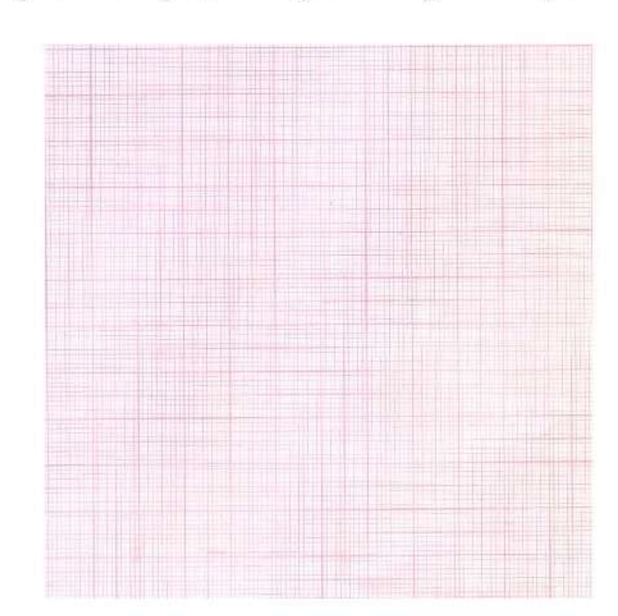


أحمد الشنتورى

(١٠) على شبكة تربيعية للحاصل الديكارتى ح × ح عين النقط التالية ثم أذكر الربع الذى تقع فيه أو المحور الذى تنتمى إليه كل من هذه النقاط :

أ (١ ، – $\frac{1}{2}$ ٣) ، ب (– $\frac{1}{2}$ ١ ، ٠) ، حـ (– ١ ، – ٥)

، ء (٢ ، – ٤) ، هـ (٠ ، ٢) ، ر (٣ ، ٥)



أ (١ ، – $\frac{1}{2}$ ٣) تقع .... ب (– $\frac{1}{2}$ ١ ، ٠) تقع ....

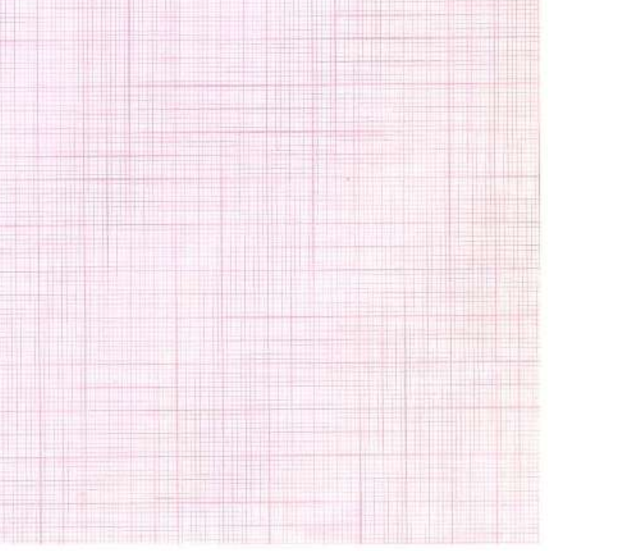
حـ (– ١ ، – ٥) تقع .... ء (٢ ، – ٤) تقع ....

هـ (٠ ، ٢) تقع .... ر (٣ ، ٥) تقع ....

(١١) على شبكة تربيعية للحاصل الديكارتى ح × ح عين النقط التالية

أ (٢ ، ٣) ، ب (– ١ ، ٣) ، حـ (– ١ ، – ١)

ثم ارسم $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{حـ أ}}$



و منها أكمل ما يلى :

[١] ق (∠ أ ب حـ) = ... °

[٢] الشكل أ ب حـ يسمى ....

[٣] محيط الشكل أ ب حـ = ...

[٤] مساحة الشكل أ ب حـ = ...

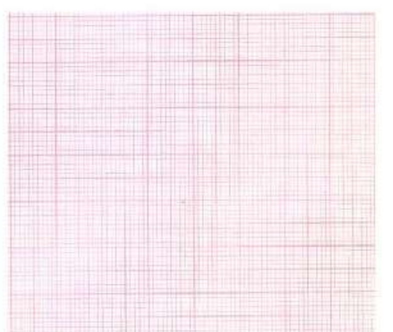
(١٢) إذا كانت : س = [− ٢ ، ٣] أوجد المنطقة التى تمثل س × س ، و بين أى من النقاط التالية تنتمى إلى الحاصل الديكارتى س × س :

أ (١ ، ٢)

، ب (٣ ، − ١)

، حـ (− ١ ، ٤)

، ء (− ٢ ، ٠)



(١٣) إذا كانت : أ = { ١ ، ٢ ، ٤ } ، ب = { ٢ ، ٣ ، ٤ } ، حـ = { ١ ، ٣ ، ٤ } أوجد :

[١] (أ ∩ ب) × (ب ∩ حـ)   [٢] (أ − ب) × (ب ∪ حـ)

(١٤) إذا كانت : س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ١ ، ٣ ، ٤ } ، ع = { ٥ ، ٦ } أثبت أن :

ع × (س − ص) = (ع × س) − (ع × ص)

(١٥) إذا كانت : س ⊂ ص ، أ ≤ ٢ أوجد قيمة أ حيث :

س × ص = {(أ ، ٤) ، (أ ، ٢) ، (أ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٣) }

أحمد الشتورى

(١٦) أكمل ما يلى :

[١] إذا كان : ن (س) = ٢ ، ن (ص) = ٤ فإن :
ن (ص × س) = ...

[٢] إذا كان : ن (س^{٢}) = ٩ فإن : ن (س) = ...

[٣] إذا كان : (س – ١ ، ١١) = (٨ ، ص + ٣) فإن :
√(س + ٢ ص) = ...

[٤] إذا كان : س^{٢} = {(١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٢) } فإن : س = ...

[٥] إذا كان : س = { ٢ ، ٥ } ، ص = { ١ ، ٣ } فإن :
(٣ ، ٥) ∈ ....

[٦] إذا كان : س × ص = {(١ ، ٣) ، (٢ ، ٣) }
فإن : (٢ ، ١) ∈ ....

[٧] { ٢ } × { ٥ } = ...

[٨] {(١ ، ٤) } = ... × ....

(١٧) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] النقطة (– ٢ ، ٢) تقع ....
[فى الربع الأول ، فى الربع الثانى ، على محور السينات، على محور الصادات]

[٢] النقطة .... تقع فى الربع الثالث
[(١ ، ١) ، (١ ، – ١) ، (– ١ ، – ١) ، (– ١ ، ١)]

[٣] إذا كانت النقطة : (أ – ٣ ، ٢) تقع على محور الصادات
فإن : أ = ...
[٣ ، – ٣ ، – ٢ ، صفر]

[٤] إذا كانت النقطة : (٣ – س ، س – ٥) تقع فى الربع الثالث حيث : س عدد صحيح فإن : س = ...
[١ ، ٢ ، ٤ ، ١/٢]

[٥] إذا كان : (٣ ، ٥) ∈ { ٣ ، ٦ } × (ك ، ٨)
فإن : ك = ...
[٣ ، ٥ ، ٦ ، ٨]

[٦] إذا كان : ن (س^{٢}) = ٩ ، ن (س × ص) = ٦
فإن : ن (ص) = ...
[١٨ ، ٩ ، ٣ ، ٢]

[٧] إذا كان : س = { ١ ، ٢ } ، ص = { ٣ ، ٤ }
فإن : (٣ ، ٤) ∈ ....
[س^{٢} ، ص^{٢} ، س × ص ، ص × س]

الدرس الثانى : العلاقات

تمهيد :

نعلم أن :

إذا كانت : س = { ٣ ، ٤ ، ٥ } ، ص = { ١ ، ٢ } فإن :

س × ص = {(٣ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٤ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٥ ، ١) ، (٥ ، ٢) }

فإذا كانت : ع = {(٤ ، ٢) ، (٥ ، ١) }

فإننا نلاحظ أن : ع ⊂ س × ص

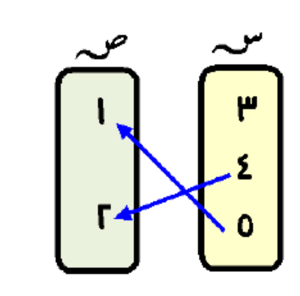
و أن : ٤ + ٢ = ٦ ، ٥ + ١ = ٦

و أن : بعض عناصر المجموعة س أرتبط ببعض عناصر المجموعة س بالتعبير : أ + ب = ١ لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص

و هذا التعبير يعين علاقة من المجموعة س إلى المجموعة ص

و الذى يرمز لها عادة بالرمز ع

و يمكن تمثيل هذه العلاقة بمخطط سهمى و آخر بيانى كما يلى :



مما سبق نستنتج :

١) العلاقة من مجموعة س إلى مجموعة ص حيث س ، ص مجموعتان غير خاليتان هى ارتباط يربط بعض أو كل عناصر س ببعض أو كل عناصر ص

٢) بيان العلاقة من مجموعة س إلى مجموعة ص هى مجموعة الأزواج المرتبة حيث المسقط الأول فى كل منها ينتمى إلى من المجموعة س و المسقط الثانى ينتمى إلى مجموعة ص

فإذا كان : (أ ، ب) ∈ بيان ع فإن : أ ∈ س ، ب ∈ ص

و يمكن التعبير عنها بالشكل أ ع ب

أما إذا كان : (أ ، ب) ∉ بيان ع فإن : أ ع̸ ب

٣) إذا كانت : ع علاقة من مجموعة س إلى مجموعة ص فإن : ع ⊂ س × ص

٤) أى مجموعة جزئية من الحاصل الديكارتى س × ص يمكن أن تعبر عن علاقة من مجموعة س إلى مجموعة ص

٥) إذا كانت : ع علاقة من مجموعة س إلى مجموعة س فإن : ع تسمى علاقة على س و تكون : ع ⊂ س × ص

٦) يمكن تمثيل بيان ع بمخطط سهمى أو مخطط بيانى

٧) لأى (أ ، ب) ∈ بيان ع فإن : ب هى صورة أ

٨) العلاقة ع يمكن أن تكون :

١] كلمة مثل : ضعف أى أن : أ ضعف ب أو ب ضعف أ

٢] جملة لفظية مثل : أ معكوس ضربى للعدد ب

٣] جملة رياضية مثل : ب = ٢ أ + ١

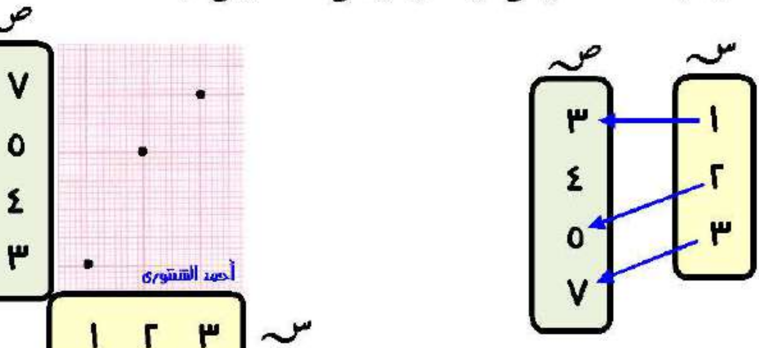
و هكذا ....

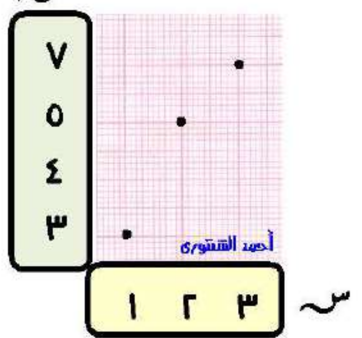
فمثلاً :

١] إذا كانت : س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧ }
و كانت ع علاقة من س إلى ص حيث ﺃ ع ب تعنى أن :
" ب = ٢ ﺃ + ١ " لكل ﺃ ∈ س ، ب ∈ ص فإن :
لإيجاد بيان ع نلاحظ :

عندما : ﺃ = ١ ∴ ب = ٢ × ١ + ١ = ٣
عندما : ﺃ = ٢ ∴ ب = ٢ × ٢ + ١ = ٥
عندما : ﺃ = ٣ ∴ ب = ٢ × ٣ + ١ = ٧

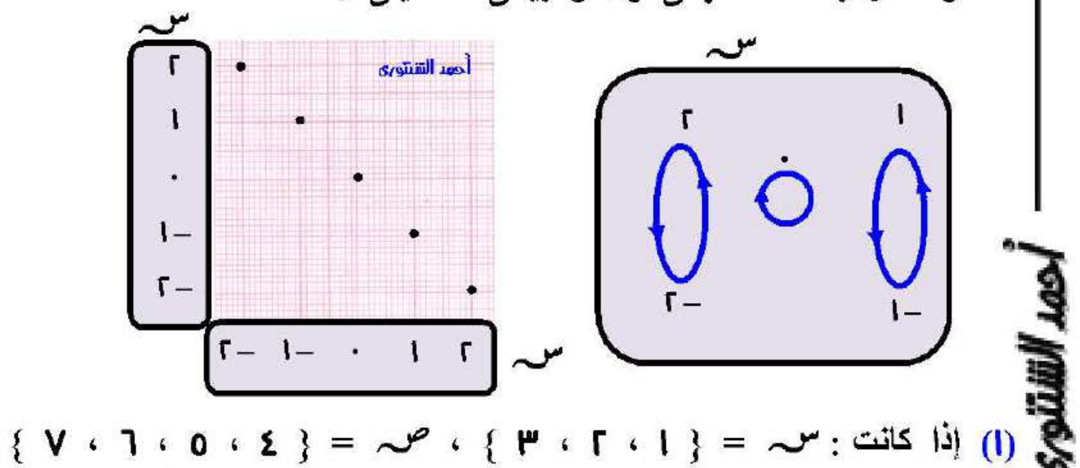
∴ ع = {(١ ، ٣) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٧)}
و تمثل بمخطط سهمى و آخر بيانى كما يلى :





٢] إذا كانت : س = { – ٢ ، – ١ ، ٠ ، ١ ، ٢ } و كانت ع علاقة
على س حيث ﺃ ع ب تعنى أن : " العدد ﺃ معكوس جمعى للعدد ب "
لكل ﺃ ∈ س ، ب ∈ ص فإن : لإيجاد بيان ع نلاحظ :

∴ ع = {(– ٢ ، ٢) ، (– ١ ، ١) ، (٠ ، ٠) ،
(١ ، – ١) ، (٢ ، – ٢)}
و تمثل بمخطط سهمى و آخر بيانى كما يلى :



(١) إذا كانت : س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ }
و كانت ع علاقة من س إلى ص حيث ﺃ ع ب تعنى أن :
" ﺃ + ب = ٨ " لكل ﺃ ∈ س ، ب ∈ ص أكتب بيان ع
و مثلها بمخطط سهمى و آخر بيانى

(٢) إذا كانت : س = { ٣ ، ٧ ، ٩ } ، ص = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }
و كانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن :
" أ = ٢ ب – ١ " لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص أكتب بيان ع
و مثلها بمخطط سهمى و آخر بيانى

(٣) إذا كانت : س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ٧ ، ٨ ، ١٠ }
و كانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن :
" أ + ب = عدد فردى " لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص أكتب بيان ع و مثلها بمخطط سهمى و آخر بيانى

(٤) إذا كانت : س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ٢ ، ٤ ، ٦ }
و كانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن :
" أ ≤ ب " لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص أكتب بيان ع
و مثلها بمخطط سهمى و آخر بيانى

(٥) إذا كانت : س = { –١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ٠ ، ١ ، ٤ ، ٦ ، ٩ }
و كانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن :
" أ^{٢} = ب " لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص أكتب بيان ع و مثلها بمخطط سهمى و آخر بيانى

(٦) إذا كانت : سـ = { $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{2}$ ، ١ ، ٢ ، ٣ } و كانت ع علاقة على سـ حيث أ ع ب تعنى أن : " العدد أ هو المعكوس الضربى للعدد ب " لكل أ ، ب ∋ سـ أكتب بيان ع و مثلها بمخطط سهمى و آخر بيانى

(٧) إذا كانت : سـ = { ١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ١٠ } و كانت ع علاقة على سـ حيث أ ع ب تعنى أن : " أ مضاعف ب " لكل أ ، ب ∋ سـ أكتب بيان ع و مثلها بمخطط سهمى و آخر بيانى

(٨) إذا كانت : سـ = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ٩ } أكتب بيان كل من العلاقات التالية على سـ :

[١] $ع_{1}$ حيث أ $ع_{1}$ ب تعنى : أ = $\frac{1}{3}$ ب ، و مثلها بمخطط سهمى

[٢] $ع_{2}$ حيث أ $ع_{2}$ ب تعنى : أ = نصف ب ، و مثلها بمخطط سهمى

[٣] $ع_{3}$ حيث أ $ع_{3}$ ب تعنى : أ = ضعف ب ، و مثلها بمخطط سهمى

[٤] $ع_{4}$ حيث أ $ع_{4}$ ب تعنى : أ = تقسم ب و مثلها بمخطط بيانى

ملاحظة :

أ تقسم ب تعنى أن : أ عامل من عوامل ب أو : ب تقبل القسمة على أ

أحمد الشتورى

(٩) إذا كانت : س = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ } ، ص = { ٣ ، ٥ ، ٦ } ، ل = { ٤ ، ٥ ، ٧ } أكمل مكان النقط بالمجموعة المناسبة :

[١] ع١ = {(٢ ، ٣) ، (٦ ، ٥)} علاقة من .... إلى ....

[٢] ع٢ = {(٣ ، ٧) ، (٥ ، ٥)} علاقة من .... إلى ....

[٣] ع٣ = {(٤ ، ٨) ، (٥ ، ٢)} علاقة من .... إلى ....

[٤] ع٤ = {(٥ ، ٨) ، (٦ ، ٢)} علاقة من .... إلى ....

(١٠) إذا كانت : ع علاقة على ن حيث ن مجموعة الأعداد النسبية و كانت أ ع ب تعنى أن " أ = ٢ ب " لكل أ ، ب ∈ ن أكمل الأزواج المرتبة التالية بحيث تنتمى إلى ع :

[١] (.... ، ٦) [٢] (١٠ ، ....)

[٣] (.... ، ٢/٣) [٤] (٤/٥ ، ....)

(١١) إذا كانت : ع علاقة على ط حيث ط مجموعة الأعداد الطبيعية و كانت أ ع ب تعنى أن " أ × ب = ١٢ " لكل أ ، ب ∈ ط أوجد قيم أ إذا كان :

[١] أ ع ٤ فإن : أ = ... [٢] (أ ، ٣ أ) ∈ ع فإن : أ = ...

[٣] ١/٢ أ ع ٦ فإن : أ = ... [٤] (٣/٤ أ ، أ) ∈ ع فإن : أ = ...

(١٢) إذا كانت جميع العلاقات التالية معرفة على ص حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة و كان أ ، ب ∈ ص أكمل ما يلى بأحد الرمزين ∈ أو ∉ :

[١] (٢ ، ٤) .... بيان ع١ حيث أ ع١ ب تعنى : أ = ١/٢ ب

[٢] (٥ ، − ١/٥) .... بيان ع٢ حيث أ ع٢ ب تعنى : العدد أ معكوس ضربى للعدد ب

[٣] (٢٥ ، ٣٥) .... بيان ع٣ حيث أ ع٣ ب تعنى : أ ، ب لهما نفس رقم الآحاد

[٤] (٣ ، ٦) .... بيان ع٤ حيث أ ع٤ ب تعنى : أ تقبل القسمة على ب

[٥] (٥ ، ٥) .... بيان ع٥ حيث أ ع٥ ب تعنى : أ عامل من عوامل ب

[٦] (٣ ، ٧) .... بيان ع٦ حيث أ ع٦ ب تعنى : أ + ب = عدد زوجي

[٧] (٢ ، ٤) .... بيان ع٧ حيث أ ع٧ ب تعنى : أ + ب = عدد أولى

(١٣) الشكل المقابل :

يمثل مخططاً سهمياً للعلاقة ع

من س إلى ص

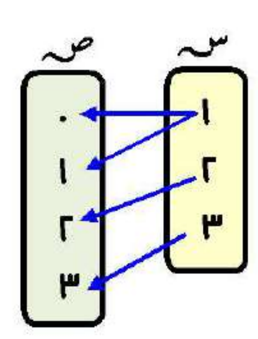
أكتب بيان ع

(١٤) الشكل المقابل :

يمثل مخططاً سهمياً للعلاقة ع

من س إلى ص

أكتب بيان ع

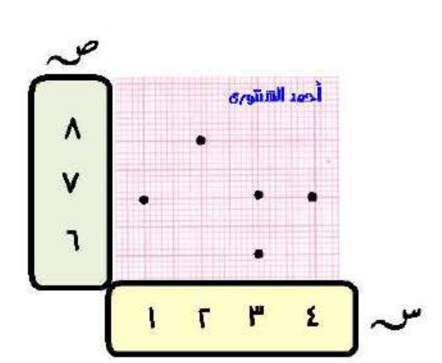


(١٥) الشكل المقابل :

يمثل مخططاً بيانياً للعلاقة ع

من س إلى ص

أكتب بيان ع

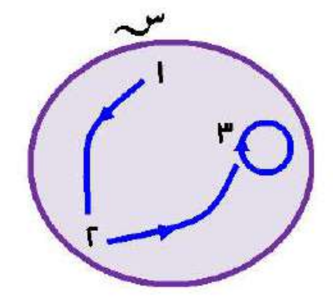


(١٦) الشكل المقابل :

يمثل مخططاً سهمياً للعلاقة ع

المعرفة على س

أكتب بيان ع



الدرس الثالث : الدالة (التطبيق)

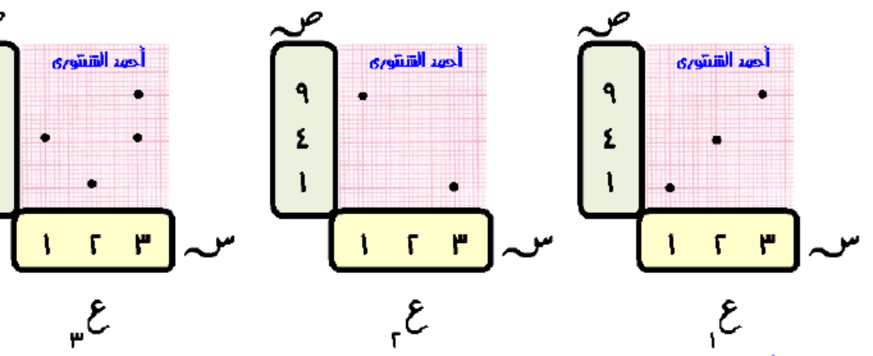
تمهيد :

الأشكال التالية تمثل كلاً من المخطط السهمى و المخطط البيانى لثلاث علاقات من س إلى ص

أولاً : المخطط السهمى لكل علاقة :

ع١ ع٢ ع٣

ثانياً : المخطط البيانى لكل علاقة :



نلاحظ أن :

أ] ع١ = { (١ ، ١) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٩) }

و أن : العلاقة ع١ تحقق شرط : أن كل عنصر من عناصر س ارتبط بعنصر واحد فقط من عناصر ص

حيث : خرج سهم واحد فقط من كل عنصر من عناصر س إلى عنصر من عناصر ص

و كل عنصر من عناصر س ظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط فى أحد الأزواج المرتبة المحددة لبيان العلاقة

و تظهر نقطة واحدة فقط على الخط الرأسى لكل عنصر من عناصر س فى المخطط البيانى الممثل للعلاقة

ب] ع٢ = { (١ ، ٩) ، (٣ ، ١) }

و أن : العلاقة ع٢ لم تحقق شرط : أن كل عنصر من عناصر س ارتبط بعنصر واحد فقط من عناصر ص

حيث : لم يخرج سهم من العنصر ٢ ∈ س إلى أى عنصر من عناصر ص

و لم يظهر العنصر ٢ ∈ س كمسقط أول فى أياً من الأزواج المرتبة المحددة لبيان العلاقة

و لا توجد أى نقطة على الخط الرأسى للعنصر ٢ ∈ س فى المخطط البيانى الممثل للعلاقة

ج] ع٣ = { (١ ، ٤) ، (٢ ، ١) ، (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٩) }

و أن : العلاقة ع٣ لم تحقق شرط : أن كل عنصر من عناصر س ارتبط بعنصر واحد فقط من عناصر ص

حيث : خرج سهمان من العنصر ٣ ∈ س إلى أى كل من ٤ ، ٩ ∈ ص

و ظهر العنصر ٣ ∈ س كمسقط أول مرتين فى الزوجين

المرتبين (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٩)
و توجد نقطتين على أحد الخطوط الرأسية للعنصر ٣ ∋ س
هما (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٩)

مما سبق نستنتج التعريف التالى :
يقال للعلاقة من المجموعة س إلى المجموعة ص أنها دالة إذا كان :
كل عنصر من عناصر المجموعة س يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط فى أحد الأزواج المرتبة المحددة لبيان العلاقة

ملاحظات

[١] تمثل العلاقة من س إلى ص دالة فى الحالات التالية :

١) فى بيان الدالة كل عنصر من عناصر المجموعة س يظهر كمسقط أول مرة واحدة فقط فى أحد الأزواج المرتبة المحددة لبيان العلاقة

٢) فى المخطط السهمى للعلاقة يخرج سهم واحد فقط من كل عنصر من عناصر س إلى أحد عناصر ص

٣) فى المخطط البيانى للعلاقة كل خط رأسى تظهر عليه نقطة واحدة فقط من النقط التى تنتمى للعلاقة

[٢] كل دالة علاقة بينما كل علاقة ليس بالضرورة أن تكون دالة

[٣] لا تمثل العلاقة من س إلى ص دالة فى الحالات التالية :

١) من بيان العلاقة : إذا وجد عنصر (واحد على الأقل) من عناصر س لا يظهر (أو يظهر أكثر من مرة) كمسقط أول فى أى من الأزواج المرتبة للعلاقة

٢) من المخطط السهمى للعلاقة : إذا كان هناك عنصر (واحد على الأقل) من عناصر س يخرج منه أكثر من سهم (أو لا يخرج منه أى سهم)

٣) من المخطط البيانى للعلاقة : يوجد أكثر من نقطة على أحد الخطوط الرأسية للمخطط البيانى للعلاقة أو (أحد الخطوط الرأسية للمخطط البيانى لا تقع عليه أى نقطة)

(١) إذا كانت : س = { ٣ ، ٤ ، ٥ } ، ص = { ٤ ، ٥ ، ٦ }
أذكر أى العلاقات التالية دالة من س إلى ص و لماذا ؟ :

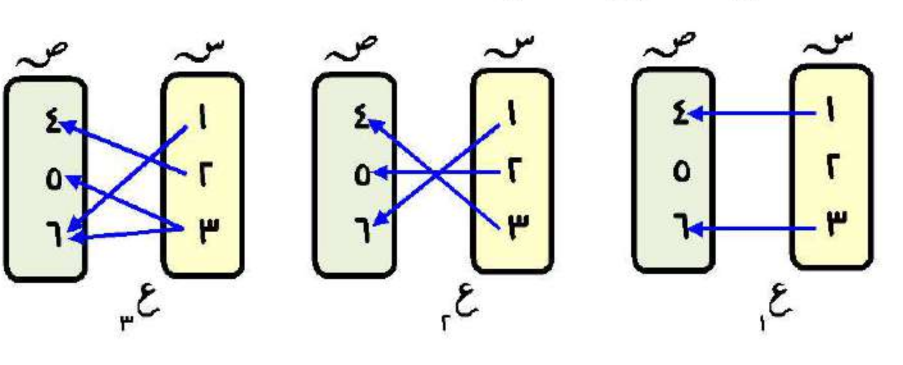
[أ] ع$_1$ = {(٣ ، ٤) ، (٤ ، ٥)}

[٢] ع$_2$ = {(٣ ، ٤) ، (٣ ، ٥) ، (٤ ، ٦) ، (٥ ، ٦)}

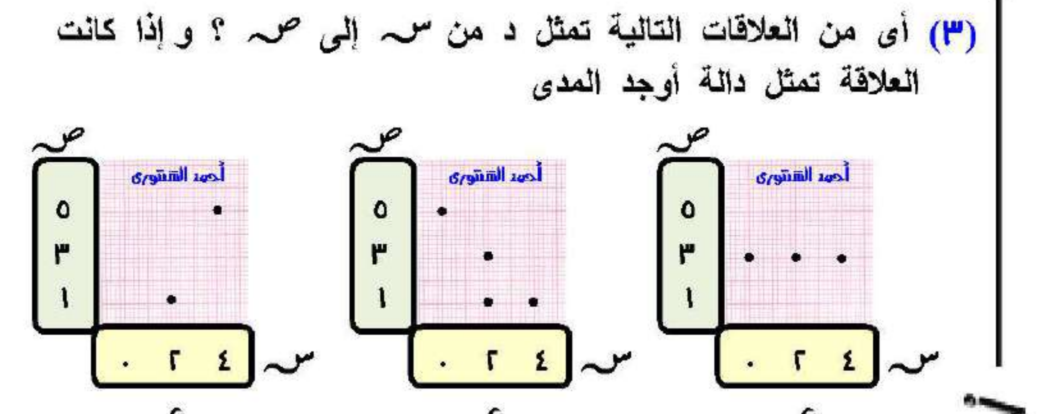
[٣] ع$_3$ = {(٣ ، ٤) ، (٤ ، ٤) ، (٥ ، ٦)}

أحمد الشتوى

(٢) أى من العلاقات التالية تمثل د من س~ إلى ص~ ؟ و إذا كانت العلاقة تمثل دالة أوجد المدى



(٣) أى من العلاقات التالية تمثل د من س~ إلى ص~ ؟ و إذا كانت العلاقة تمثل دالة أوجد المدى



التعبير الرمزى للدالة :

يرمز للدالة بأحد الرمز : د أو ق أو ر أو ....
و الدالة د من المجموعة س إلى المجموعة ص تكتب رياضياً
د : س ← ص و تقرأ : د دالة من س إلى ص

ملاحظات :

1] إذا كانت : د دالة من المجموعة س إلى نفسها
فإنه يقال أن : د دالة على س

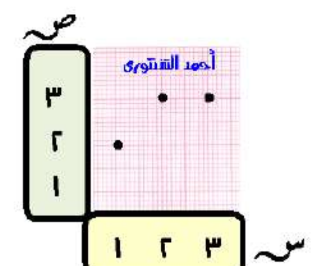
2] إذا كان : الزوج المرتب (س ، ص) ينتمى لبيان الدالة
فإن : العنصر ص يسمى صورة العنصر س بالدالة ،
و يعبر عن ذلك بإحدى الصورتين :

1) د : س ← ص و تقرأ : الدالة د ترسم س إلى ص

2) د (س) = ص و تقرأ : د دالة حيث : د (س) = ص

فمثلاً :

إذا كانت : س = { ١ ، ٢ ، ٣ } و كان : د (١) = ٢ ،
د (٢) = ٣ ، د (٣) = ٣ فإن :
بيان د = { (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٣) }
و الشكلان التاليان يوضحان كل من المخطط السهمى و المخطط البيانى للدالة د



المجال و المجال المقابل و المدى :

إذا كانت : د من المجموعة س إلى المجموعة ص
أى أن (د : س ← ص) فإن :

1] المجموعة س تسمى مجال الدالة

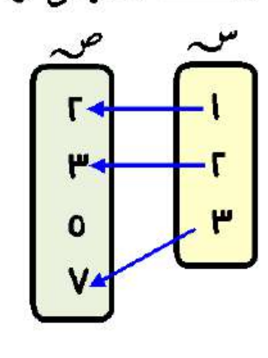
2] المجموعة ص تسمى المجال المقابل للدالة

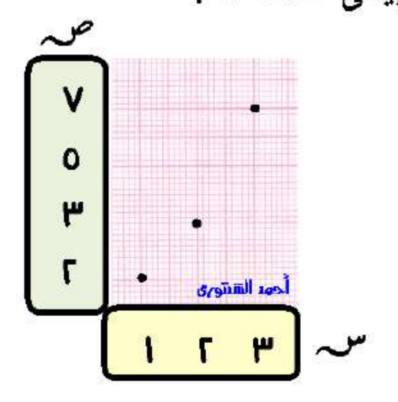
3] مجموعة صور عناصر مجموعة المجال س بالدالة د تسمى مدى الدالة

4] المدى مجموعة جزئية من المجال المقابل للدالة

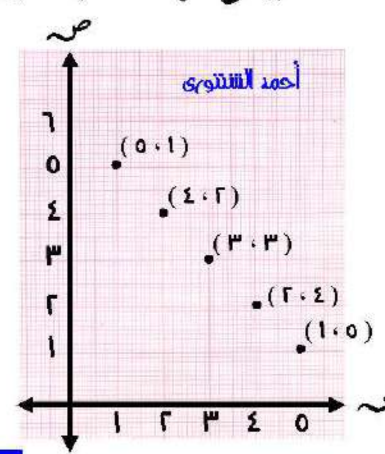
فمثلاً :

1) إذا كانت : س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ }
، بيان د = { (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٧) } فإن :
مجال الدالة د هو : س = { ١ ، ٢ ، ٣ }
المجال المقابل للدالة د هو : ص = { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ }
مدى الدالة د هو : { ٢ ، ٣ ، ٧ }
لاحظ المخطط السهمى و المخطط البيانى للدالة د :





٣) إذا كانت : س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ،
ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } و كانت : د : س ← ص
حيث : د (س) = ٦ − س فإن :
د (١) = ٦ − ١ = ٥ ، د (٢) = ٦ − ٢ = ٤ ،
د (٣) = ٦ − ٣ = ٣ ، د (٤) = ٦ − ٤ = ٢ ،
د (٥) = ٦ − ٥ = ١ ، و يكون :
بيان الدالة د = { (١ ، ٥) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٣)
، (٤ ، ٢) ، (٥ ، ١) }
، مدى الدالة = { ٥ ، ٤ ، ٣ ، ٢ ، ١ }
، المخطط البيانى لها كما بالشكل التالى :



(٤) إذا كانت : س = { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } و كان : د (٣) = ٣ ، د (٤) = ٥ ، د (٥) = ٤ ، د (٦) = ٥ أكتب بيان د
و مثلها بمخطط سهمى و آخر بيانى ثم أكتب المدى

(٥) إذا كانت : س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ،
ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } و كانت د : س ← ص
حيث : د (س) = س + ٢ أوجد :

[١] بيان الدالة د
[٢] مدى الدالة د
[٣] ارسم مخطط بيانى للدالة د

(٦) إذا كانت : س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ }
و كانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن :
" أ + ب = عدد أولى " لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص أكتب
بيان ع و مثلها بمخطط سهمى و آخر بيانى . هل ع دالة و لماذا ؟
و إذا كانت دالة أكتب المدى

(٧) إذا كانت : س = { ١ ، ٤ ، ٧ } ، ص = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٦ }
و كانت ع علاقة من س إلى ص حيث أ ع ب تعنى أن :
" أ + ب < ٨ " لكل أ ∈ س ، ب ∈ ص أكتب بيان ع
و مثلها بمخطط سهمى و آخر بيانى . هل ع دالة و لماذا ؟
و إذا كانت دالة أكتب المدى

(٨) إذا كانت : س~ = { ١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ١٠ } و كانت ع علاقة على س~ حيث أ ع ب تعنى أن : " أ مضاعف ب " لكل أ ، ب ∈ س~ أكتب بيان ع و مثلها بمخطط سهمى و آخر بيانى هل ع دالة و لماذا ؟ و إذا كانت دالة أكتب المدى

(٩) إذا كانت : س~ = { س : س ∈ ط ، ١ < س ≤ ٥ } و كانت ع علاقة على س~ حيث أ ع ب تعنى أن : " أ + ب = ٧ " لكل أ ، ب ∈ س~ أكتب بيان ع و مثلها بمخطط سهمى و آخر بيانى هل ع دالة و لماذا ؟ و إذا كانت دالة أكتب المدى

(١٠) إذا كانت : س~ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ ، ١١ } و كانت ع علاقة على س~ حيث أ ع ب تعنى أن : " أ + ٢ ب = عدد فردى " لكل أ ، ب ∈ س~ أكتب بيان ع و مثلها بمخطط سهمى و آخر بيانى هل ع دالة و لماذا ؟ و إذا كانت دالة أكتب المدى

(١١) إذا كانت : س~ = { ٢ ، ٥ ، ٨ } ، ص~ = { ١٠ ، ١٦ ، ٢٤ ، ٣٠ } و كانت ع علاقة من س~ إلى ص~ حيث أ ع ب تعنى أن : " أ عامل من عوامل ب " لكل أ ∈ س~ ، ب ∈ ص~ أكتب بيان ع و مثلها بمخطط سهمى و آخر بيانى . هل ع دالة و لماذا ؟ و إذا كانت دالة أكتب المدى

(١٢) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] إذا كانت : س = { ٣ ، ٥ ، ٧ } و كانت ع علاقة على س
فإن : العلاقة التى تمثل دالة من بين العلاقات التالية هى ....
[ع = {(٣ ، ٥) ، (٥ ، ٣) ، (٣ ، ٧)} ،
ع = {(٣ ، ٥) ، (٥ ، ٥) ، (٥ ، ٧)} ،
ع = {(٣ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (٧ ، ٦)} ،
ع = {(٣ ، ٥) ، (٥ ، ٧)}]

[٢] إذا كانت : س = { ٢ ، ٥ ، ٨ } ، ص = { ٣ ، ٥ }
و كانت ع دالة من س إلى ص حيث :
ع = {(٢ ، ٣) ، (٥ ، ٣) ، (س ، ٣)}
فإن : س = ...
[٨ ، ٥ ، ٣ ، ٢]

[٣] إذا كانت ع دالة حيث :
ع = {(٤ ، ٣) ، (٥ ، ٦) ، (٩ ، ٣)}
فإن : مدى الدالة ع هو ....
[{ ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٩ } ، { ٤ ، ٥ ، ٩ } ، { ٣ ، ٦ ، ٩ } ، { ٣ ، ٦ }]

[٤] إذا كانت (م ، ١٣) ∈ بيان الدالة د حيث :
د (س) = ٣ س + ٤ فإن : م = ...
[٦ ، -٦ ، ٣ ، -٣]

[٥] إذا كانت (٢ ، أ) ∈ بيان الدالة د حيث :
د (س) = ٣ س - ٦ فإن : أ = ...
[صفر ، ٢ ، ٧ ، ٩]

[٦] إذا كانت (٢ ، -٦) ∈ بيان الدالة د حيث :
د (س) = ك س + ٨ فإن : ك = ...
[٦ ، -٦ ، ٧ ، -٧]

[٧] مجموعة صور عناصر مجال الدالة تسمى ....
[القاعدة ، المجال ، المدى ، المجال المقابل]

[٨] إذا كانت د د دالة من المجموعة س إلى المجموعة ص
فإن : مجال الدالة د هو ....
[س ، ص ، س × ص ، ص × س]

[٩] إذا كانت د دالة من المجموعة س إلى المجموعة ص
فإن : المجال المقابل للدالة د هو ....
[س ، ص ، س × ص ، ص × س]

[١٠] إذا كانت : س = { ١ ، ٣ ، ٥ } و كانت د : س ← ح
حيث ح مجموعة الأعداد الحقيقية ، د (س) = ٢ س + ١
فإن : مدى د = ...
[{ ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ٩ } ، { ٣ ، ٧ ، ١١ } ، { ١ ، ٣ ، ٥ } ، { ٧ ، ١١ }]

الدرس الرابع : دوال كثيرات الحدود

تمهيد :

بملاحظة الدوال التالية حيث : ح مجموعة الأعداد الحقيقية

$د_{١} : ح \to ح$ ، $د_{١}(س) = ٣$

$د_{٢} : ح \to ح$ ، $د_{٢}(س) = ٤س + ١$

$د_{٣} : ح \to ح$ ، $د_{٣}(س) = ٣س^{٢} - ٢س + ٥$

نجد أن :

١] المجال و المجال المقابل لكل منها هو ح

٢] قاعدة الدالة (صورة س) هى حد جبرى أو مقدار جبرى

٣] قوة (أس) المتغير س فى أى من الحدود هو عدد طبيعى

لذلك فإن أى من هذه الدوال تسمى : دالة كثيرة حدود

تعريف :

الدالة $د : ح \to ح$ حيث :

$$د(س) = أ_{٠} + أ_{١}س + أ_{٢}س^{٢} + أ_{٣}س^{٣} + ... + أ_{ن}س^{ن}$$

حيث : $أ_{٠} ، أ_{١} ، أ_{٢} ، أ_{٣} ، .... ، أ_{ن} \in ح$ ، $ن \in ط$ ، $أ_{ن} \neq ٠$

تسمى كثيرة حدود من الدرجة ن

و تكون درجة كثيرة الحدود هى أكبر قوة للمتغير فى قاعدة الدالة

ملاحظات :

١) يجب التعرف على الدالة ما إذا كانت كثيرة حدود أم لا قبل وضع قاعدتها فى أبسط صورة

٢) عند بحث درجة الدالة يجب وضع قاعدتها فى أبسط صورة قبل تعيين درجتها

فمثلاً :

١) الدالة : $د_{١}(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} + ٤س + ٢$

هى دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة

٢) الدالة : $د_{٢}(س) = س^{٢} + \sqrt{س} - ٥$

ليست كثيرة حدود لأن : قوة الحد $\sqrt{س} \notin ط$

وهى من الدرجة الثانية

٣) الدالة : $د_{٣}(س) = س(س^{٢} - ٣)^{٢}$ كثيرة حدود

$\because د_{٣}(س) = س(س^{٤} - ٦س^{٢} + ٩)$

$= س^{٥} - ٦س^{٣} + ٩س$

$\therefore$ هى من الدرجة الخامسة

(لاحظ : وضعت الدالة فى أبسط صورة)

٤) الدالة : $د_{٤}(س) = س + \frac{١}{س}$

ليست كثيرة حدود لأن : قوة الحد $\frac{١}{س} \notin ط$

٥) الدالة : $د_{٤}(س) = س(س + \frac{١}{س} - ١)$

ليست كثيرة حدود لأن : قوة الحد $\frac{١}{س} \notin ط$

(لاحظ : $د_{٤}(س) = س^{٢} + ١ - س$ فى أبسط صورة ، و هى دالة من الدرجة الثانية و لكنها ليست كثيرة حدود)

(١) أى من الدوال التالية تمثل دالة كثيرة حدود ؟ :

[١] د$_{١}$(س) = ٤ س^{٤} + ٣ س − ١

[٢] د$_{٢}$(س) = ٢ س^{٣} + $\sqrt[٣]{س}$ − ٦

[٣] د$_{٣}$(س) = س^{٢} + $\frac{٢}{س}$ + ٢

[٤] د$_{٤}$(س) = س + ٣ س$^{-١}$ − ٤

[٥] د$_{٥}$(س) = س (س − ٣)^{٢}

(٢) إذا كانت د : ح ← ح فأذكر درجة الدالة فى كل حالة :

[١] د(س) = ٤ س^{٤} + ٢ س^{٢} − ١

[٢] د(س) = ٢ س − ١

[٣] د(س) = ٢ س^{٢} − (٢ س^{٢} − ٢)

[٤] د(س) = ٤ س^{٣} − (٣ س^{٣} + ٥)

[٥] د(س) = (س − ١)(س + ٢)

[٦] د(س) = س (س − ٢ س^{٢})

[٧] د(س) = س^{٢} (س − ٣)^{٢}

أحمد الشتوى

ملاحظة :

إذا كانت د : ح ← ح فإن :

عند كل قيمة للمتغير قيمة س ∋ ح توجد قيمة للدالة د

فمثلاً :

إذا كان : د(س) = س^{٢} + ٢ س − ١

فإن : د(٢) = (٢)^{٢} + ٢ × ٢ − ١ = ٤ + ٤ − ١ = −١

، د(٣) = (٣)^{٢} + ٣ × ٢ − ١ = ٩ + ٦ − ١ = ١٤

، د($\sqrt{٢}$) = ($\sqrt{٢}$)^{٢} + ٣ × $\sqrt{٢}$ − ١

= ٢ + ٣ $\sqrt{٢}$ − ١ = ١ + ٣ $\sqrt{٢}$

، د(٠) = −١ ، د(−٢) = صفر

(٣) إذا كان : د(س) = س^{٢} − ٣ س + ٢ أوجد :

[١] د(٢) = ...

[٢] د(١) = ...

[٣] د(−٣) = ...

[٤] د($\sqrt{٣}$) = ...

[٥] د($\frac{١}{٢}$) = ...

الدالة الخطية :

الدالة د : ح ← ح حيث : د (س) = أ س + ب ، أ ، ب ∈ ح ، أ ≠ ٠ .

تسمى دالة خطية أو دالة من الدرجة الأولى

التمثيل البيانى للدالة الخطية :

تمثل الدالة الخطية بيانياً بخط مستقيم

فمثلاً :

لتمثيل الدالة الدالة د : ح ← ح حيث : د (س) = ٢ س − ١

بيانياً نلاحظ : ∵ د (س) = ٢ س − ١

∴ د (٠) = ٠ − ١ = −١ ، د (١) = ٢ − ١ = ١

، د (٢) = ٤ − ١ = ٣

و يمكن وضع هذه الأزواج المرتبة فى جدول كما يلى :

س	٠	١	٢
ص	−١	١	٣

و تمثل الأزواج المرتبة على الشبكة التربيعية لحاصل الضرب اليكارتى ح × ح و نصل بينها لنحصل على خط مستقيم

ملاحظات :

١) يكتفى بإيجاد زوجين مرتبين ينتميان إلى بيان الدالة و يفضل إيجاد. زوج مرتب ثالث للتحقق من صحة التمثيل البيانى

٢) يمكن كتابة الدالة الخطية : د (س) = أ س + ب على الصورة : ص = أ س + ب

٣) لإيجاد نقطة تقاطع الخط المستقيم الممثل للدالة الخطية مع محور السينات نضع : ص = ٠ " د (س) = ٠ " فى قاعدة الدالة ثم نوجد قيمة س المناظرة فتكون النقطة هى (س ، ٠)

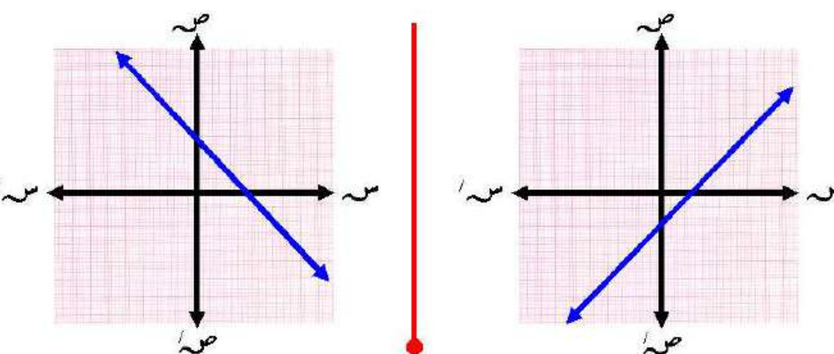
٤) لإيجاد نقطة تقاطع الخط المستقيم الممثل للدالة الخطية مع محور الصادات نضع : س = ٠ فى قاعدة الدالة ثم نوجد قيمة ص " د (س) " فتكون النقطة هى (٠ ، ص)

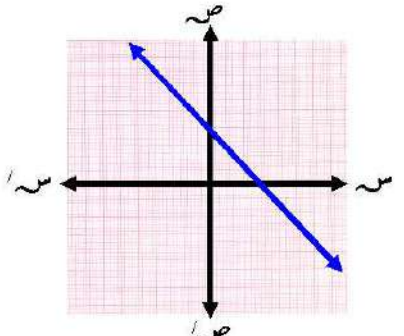
٥) الخط المستقيم الممثل للدالة الخطية يصنع مع محور السينات :

١] زاوية حادة إذا كان : أ > ٠ .

٢] زاوية منفرجة إذا كان : أ < ٠ .

كما بالشكل التالى :

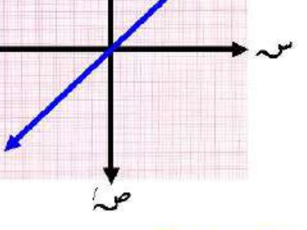


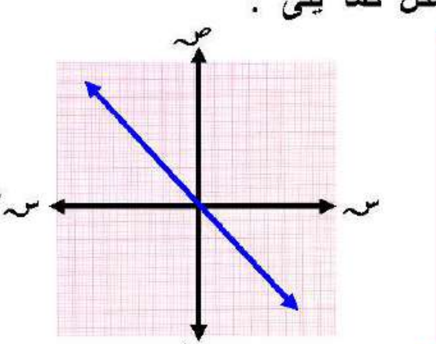
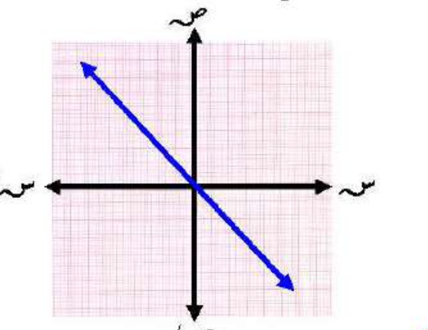


٥) إذا كانت : د : ح ← ح ، د(س) = أ س حيث : أ ≠ ٠
فإنه يمثلها بيانياً مستقيم يمر بنقطة الأصل ، حيث :

ا] إذا كان : أ > ٠ .　　٢] إذا كان : أ < ٠ .

يكون الشكل كما يلى :



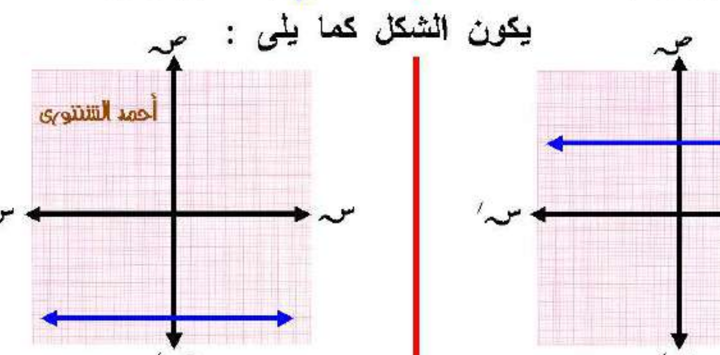



حالة خاصة :

إذا كانت : د : ح ← ح ، د(س) = ب حيث : ب ∈ ح
فإن : د تسمى دالة ثابتة ، و تمثل بمستقيم يوازى محور السينات
و يمر بالنقطة (٠ ، ب)

ا] إذا كان : ب > ٠ .　　٢] إذا كان : ب < ٠ .

يكون الشكل كما يلى :





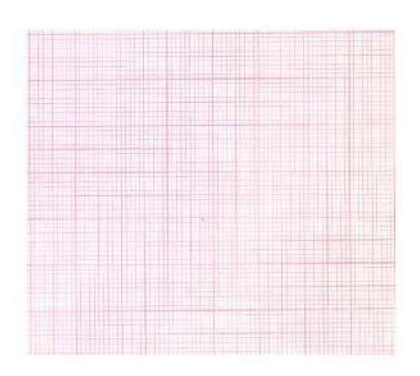
و إذا كانت : د(س) = ٠ .
فإنها تمثل بمستقيم ينطبق على محور السينات

(٤) مثل بيانياً الدوال التالية ثم أوجد نقط تقاطع كل منها مع محورى الإحداثيات :

[ا] د(س) = س − ١



[٢] د(س) = ٢ − س

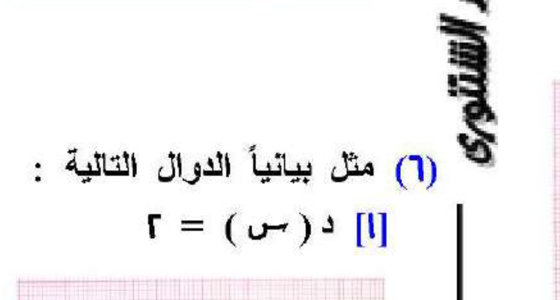


[٣] د (س) = ٢ س + ١

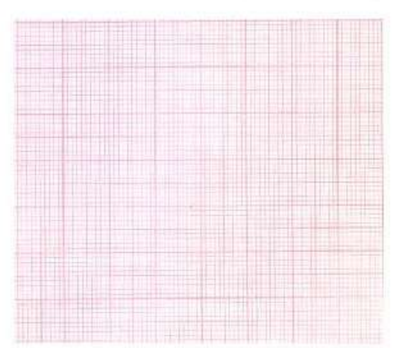
[٤] د (س) = ٣ − ٢ س

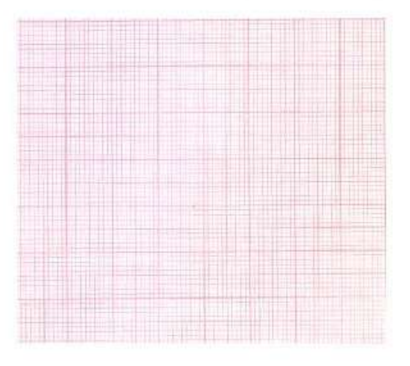
(٥) مثل بيانياً الدوال التالية :

[أ] د (س) = ٢ س



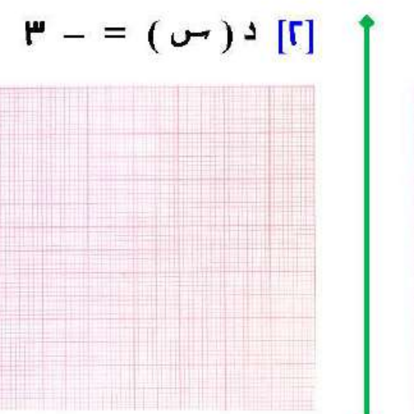
[ب] د (س) = − ٣ س



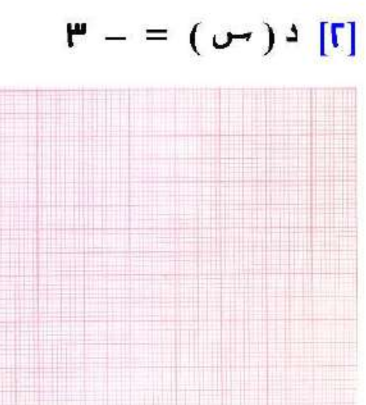


(٦) مثل بيانياً الدوال التالية :

[أ] د (س) = ٢



[ب] د (س) = − ٣



الدالة التربيعية :

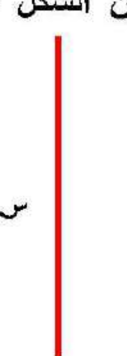
الدالة د : ح ← ح حيث : د (س) = أ س^{٢} + ب س + حـ ،
أ ، ب ، حـ ∈ ح ، أ ≠ ٠ .
تسمى دالة تربيعية و هى من الدرجة الثانية

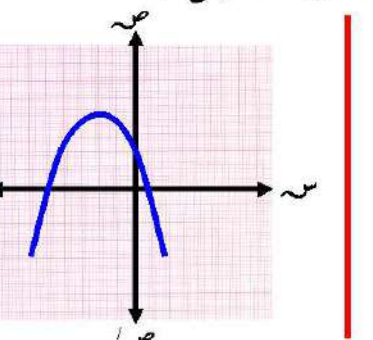
التمثيل البيانى للدالة التربيعية :

لتمثيل الدالة التربيعية بيانياً نعين بعض الأزواج المرتبة (س ، د (س))
التى تنتمى إلى بيان الدالة حيث : س ∈ ح فنحصل على :

١) إذا كان : أ > ٠ .　　　٢) إذا كان : أ < ٠ .

يكون الشكل كما يلى :





و نلاحظ أن :

أ > ٠	أ < ٠
١) المنحنى مفتوح لأعلى	١) المنحنى مفتوح لأسفل

٢) نقطة رأس المنحنى هى : ($\frac{-ب}{٢أ}$ ، د ($\frac{-ب}{٢أ}$))

٣) معادلة محور التماثل هى : س = $\frac{-ب}{٢أ}$

أ > ٠	أ < ٠
٤) للمنحنى قيمة صغرى عند نقطة رأس المنحنى	٤) للمنحنى قيمة عظمى عند نقطة رأس المنحنى

أحمد الشنتورى

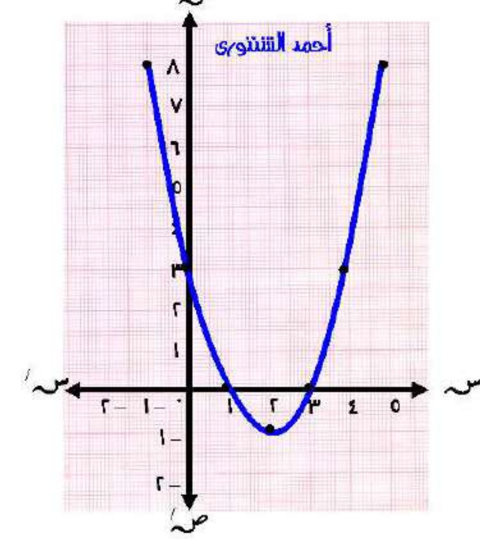
فمثلاً :

١) لتمثيل الدالة التربيعية د حيث : د (س) = س^{٢} − ٤ س + ٣
متخذاً س ∈ [− ١ ، ٥]

نجد أن : [− ١ ، ٥] تعطى بعض القيم الممكنة للمتغير س
فنوجد قيم د (س) المناظرة لها كما يلى :
د (− ١) = ٨ ، د (٠) = ٣ ، .... و هكذا
و نضع هذه الأزواج المرتبة فى جدول كالتالى :

س	− ١	٠	١	٢	٣	٤	٥
ص = د (س)	٨	٣	٠	− ١	٠	٣	٨

نعين على الشبكة التربيعية المتعامدة النقاط التى تمثل الأزواج المرتبة ثم نرسم منحنى يمر بهذه النقاط كما بالشكل المقابل



و نجد :

١) إحداثى نقطة رأس المنحنى هى : (٢ ، − ١)

٢) معادلة محور التماثل هى : س = ٢

٣) القيمة الصغرى للدالة = − ١

أحمد الشنتورى

٢) لتمثيل الدالة التربيعية د حيث : د (س) = − $س^٢$ − ٢ س + ٤

متخذاً س ∈ [− ٤ ، ٢]

نجد أن : [− ٤ ، ٢] تعطى بعض القيم الممكنة للمتغير س

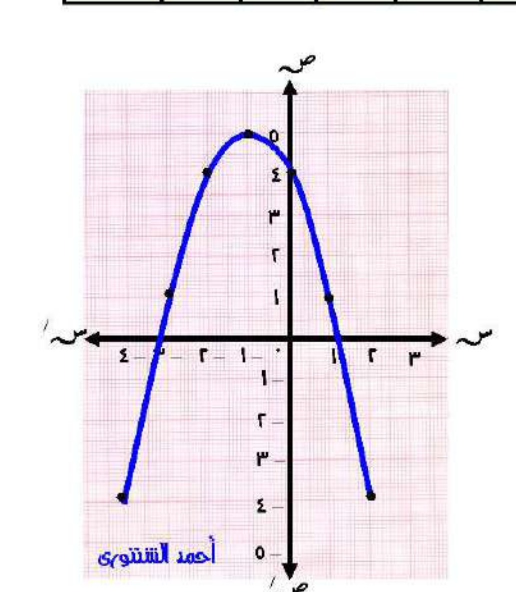
فنوجد قيم د (س) المناظرة لها كما يلى :

د (− ٤) = − ٤ ، د (٠) = ٤ ، .... و هكذا

و نضع هذه الأزواج المرتبة فى جدول كالتالى :

س	− ٤	− ٣	− ٢	− ١	٠	١	٢
ص = د (س)	− ٤	١	٤	٥	٤	١	− ٤

نعين على الشبكة التربيعية المتعامدة النقاط التى تمثل الأزواج المرتبة ثم نرسم منحنى يمر بهذه النقاط كما بالشكل المقابل



و نجد :

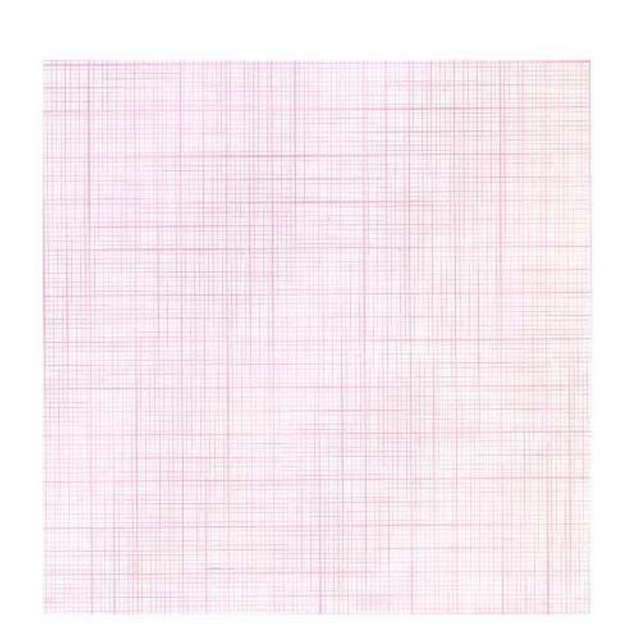
١) إحداثى نقطة رأس المنحنى هى : (− ١ ، ٥)

٢) معادلة محور التماثل هى : س = − ١

٣) القيمة العظمى للدالة = ٥

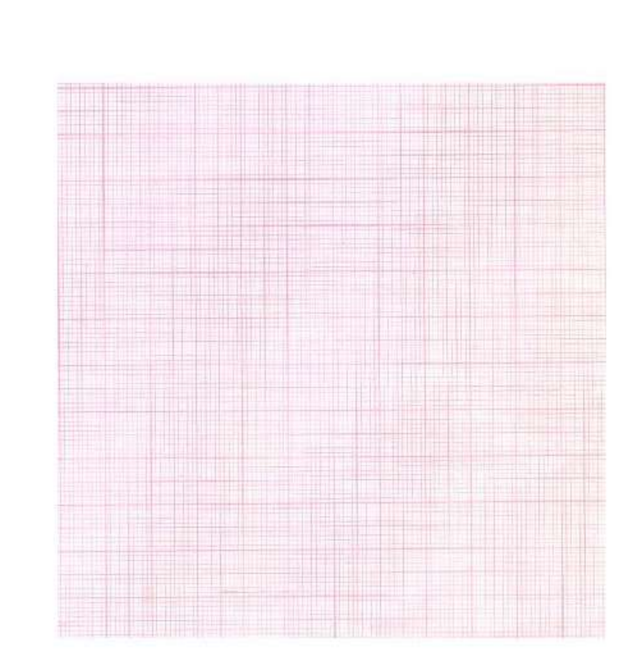
(٧) مثل بيانياً منحنى الدالة د (س) = $س^٢$ + ٢ س + ١

متخذاً س ∈ [− ٤ ، ٢] ثم أوجد : إحداثى رأس المنحنى و معادلة محور التماثل ، و القيمة العظمى أو الصغرى للدالة



(٨) مثل بيانياً منحنى الدالة د (س) = − ٢ س^{٢} + ٤ س + ٣

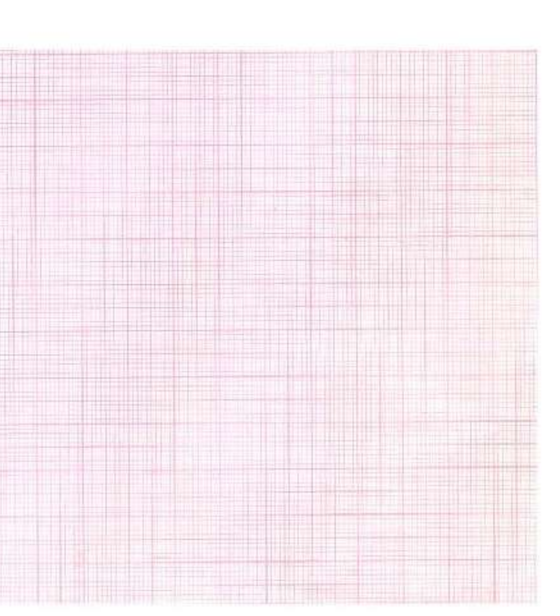
متخذاً س ∈ [− ١ ، ٣] ثم أوجد : إحداثى رأس المنحنى و معادلة محور التماثل ، و القيمة العظمى أو الصغرى للدالة



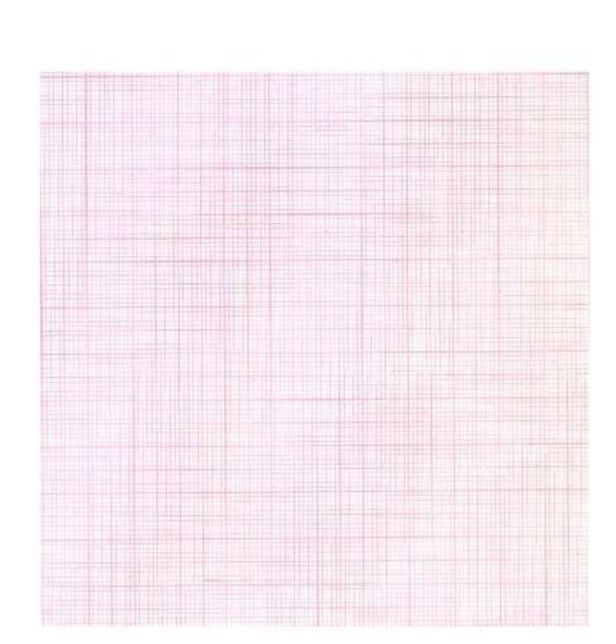


(٩) مثل بيانياً منحنى الدالة د (س) = (س − ٣)^{٢}

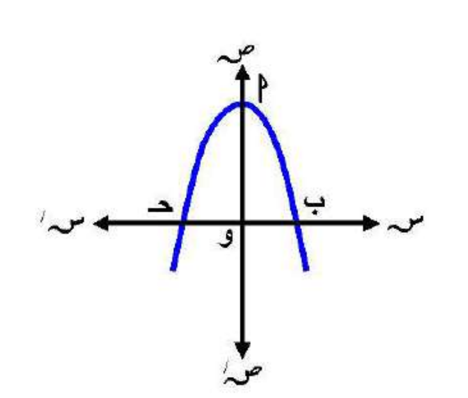
متخذاً س ∈ [٠ ، ٦] ثم أوجد : إحداثى رأس المنحنى و معادلة محور التماثل ، و القيمة العظمى أو الصغرى للدالة



(١٠) إذا كان : د (س) = ؋ س^{٢} + ب س − ٣ ، و كان :
ب = − ٢ ؋ ، (١ ، − ٤) ينتمى إلى بيان الدالة أوجد قيمة كل من ؋ ، ب ثم مثل الدالة بيانياً متخذاً س ∈ [− ٢ ، ٤]



(١١) الشكل المقابل :
يمثل منحنى الدالة د حيث :
د (س) = م − س^{٢}
، إذا كان : ؋ و = ٤ وحدات
أوجد : قيمة م ،
و إحداثى ب ، حـ ثم أحسب مساحة Δ ؋ ب حـ



أحمد الشتورى

(١٢) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] الدالة د حيث : د (س) = ٢ س يمثلها بيانياً خط مستقيم يمر بالنقطة ....

[(٢ ، ٢) ، (٢ ، ٠) ، (٠ ، ٠) ، (٠ ، ٢)]

[٢] إذا كانت الدالة د حيث : د (س) = ٣ س – ١ يمثلها بيانياً خط مستقيم يمر بالنقطة (٢ ، م) فإن : م = ...

[٥ ، ٣ ، ٢ ، ١]

[٣] إذا كانت : د (س) = $س^{٢}$ + ١ فإن : د (٣) = ...

[٢٧ ، ١٠ ، ٩ ، ٦]

[٤] إذا كانت : د (س) = $س^{٣}$ فإن : د (٢) + د (–٢) = ...

[–١٦ ، ١٦ ، ٤ ، صفر]

[٥] إذا كانت : د (س) = ٤ س + ك ، د (٣) = ١٥ فإن : ك = ...

[١٥ ، ٤ ، ٣ ، –٣]

[٦] إذا كانت : د (س) = ٧ س – $\frac{١}{٢}$ ، د ($\frac{١}{٢}$) = ...

[٧ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٧}{٢}$ ، ٣]

[٧] إذا كانت الدالة د حيث : د (س) = ٣ س – ١ يمثلها بيانياً خط مستقيم يمر بالنقطة (أ ، ٢) فإن : أ = ...

[١ ، ٢ ، ٣ ، –٣]

[٨] إذا كانت : د (س) = س – ٦ ، و كان : $\frac{١}{٢}$ د (أ) = –٢ فإن : أ = ...

[٦ ، $\frac{١}{٢}$ ، صفر ، ٢]

[٩] الدالة د حيث : د (س) = $س^{٣}$ + $س^{٢}$ + ٢ س – ٣ كثيرة حدود من الدرجة ....

[الأولى ، الثانية ، الثالثة ، الرابعة]

[١٠] الدالة د حيث : د (س) = $س^{٢}$ + ١ – ٣ $س^{٤}$ كثيرة حدود من الدرجة ....

[الأولى ، الثانية ، الثالثة ، الرابعة]

[١١] الدالة د حيث : د (س) = ٣ س (س + ١) كثيرة حدود من الدرجة ....

[الأولى ، الثانية ، الثالثة ، الرابعة]

[١٢] إذا كانت : د (س) = – $س^{٢}$ + ٣ فإن : د (–١) = ...

[٥ ، ٣ ، ٢ ، ١]

[١٣] دالة تربيعية إحداثى رأس المنحنى لها هو (٢ ، –٣) فإن : معادلة محور التماثل هى : س = ...

[٠ ، ٢ ، –٣ ، –٦]

[١٤] إذا كان : منحنى الدالة د حيث : د (س) = أ $س^{٢}$ – ١ يمر بالنقطة (١ ، ٠) فإن : أ = ...

[٠ ، ١ ، ٢ ، –١]

الوحدة الثانية النسبة و التناسب و التغير الطردى و التغير العكسى

الدرس الأول : النسبة

تمهيد :

نعلم أن :

النسبة هى مقارنة بين كميتين

فمثلاً :

إذا كان لدى سارة ٦ كراسات ، و ٥ أقلام فإن النسبة بين عدد الكراسات إلى عدد الأقلام يمكن كتابتها بإحدى الصور :

٦ إلى ٥ أو $\frac{٦}{٥}$

و بصفة عامة :

إذا كان : ﺃ ، ب عددين حقيقيين فإن : النسبة بين العدد ﺃ ، العدد ب

تكتب بإحدى الصور : ﺃ إلى ب أو ﺃ : ب أو $\frac{ﺃ}{ب}$

و يسمى ﺃ مقدم النسبة ، ب تالى النسبة

و يسمى ﺃ ، ب بحدى النسبة

ملاحظات :

[١] إذا ضربنا حدى النسبة فى عدد حقيقى لا يساوى الصفر

فإن : النسبة لا تتغير

فمثلاً :

١) $\frac{٣}{٤} = \frac{٦}{٨}$ و ذلك بضرب حديها × ٢

٢) $\frac{٨}{٢٠} = \frac{٢}{٥}$ و ذلك بضرب حديها × $\frac{١}{٤}$

[٢] إذا أضفنا إلى حدى النسبة عدداً حقيقياً لا يساوى الصفر

فإن : النسبة تتغير

فمثلاً :

١) إذا أضفنا ٣ إلى حدى النسبة $\frac{١}{٢}$ نحصل على النسبة $\frac{٤}{٥}$

لاحظ أن : $\frac{١}{٢} \neq \frac{٤}{٥}$

كذلك إذا أضفنا (– ٢) إلى حدى النسبة $\frac{٥}{٦}$ نحصل على النسبة $\frac{٣}{٤}$ لاحظ أن : $\frac{٥}{٦} \neq \frac{٣}{٤}$

٢) لإيجاد العدد الذى إذا أضيف إلى حدى النسبة $\frac{٢}{٥}$ فإنها تصبح $\frac{١}{٢}$ نتبع ما يلى :

نفرض أن : العدد = س

$$\therefore \frac{٢ + س}{٥ + س} = \frac{١}{٢}$$

∴ ٢ (٢ + س) = ١ (٥ + س)

∴ ٤ + ٢ س = ٥ + س

∴ ٢ س – س = ٥ – ٤

∴ س = ١

أى أن العدد هو : ١

أحمد الشتتورى

(١) أوجد العدد الذى إذا أضيف إلى حدى النسبة ٧ : ١٢ فإنها تصبح ٢ : ٣

(٢) أوجد العدد الذى إذا طرح إلى حدى النسبة ٥ : ٦ فإنها تصبح ٣ : ٢

(٣) أوجد العدد الذى إذا طرح ثلاثة أمثاله إلى حدى النسبة ٤٩ : ٦٩ فإنها تصبح ٢ : ٣

(٤) أوجد العدد الموجب الذى إذا أضيف مربعه إلى حدى النسبة ١٧ : ١١ فإنها تصبح ٧ : ٦

]٣ إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{٧}{٤}$ فإن : هذا لا يعنى أن : أ = ٧ ، ب = ٤ لجميع قيم أ ، ب

و لكن يمكن القول أن : أ = ٧ م ، ب = ٤ م حيث : م ≠ ٠

، و يكون : أ = ٧ ، ب = ٤ عندما : م = ١

فمثلاً :

لإيجاد العددين الحقيقيين الذين النسبة بينهما ٢ : ٣ ، و إذا أضيف للعدد الأول ٤ ، و طرح من الثانى ١٢ أصبحت النسبة بينهما ٥ : ٣ نتبع ما يلى :

∵ النسبة بين العددين ٢ : ٣

∴ نفرض أن العدد الأول = ٢ م ، العدد الثانى = ٣ م

∴ $\frac{٢ م + ٧}{٣ م - ١٢} = \frac{٥}{٣}$

∴ ٥ (٣ م - ١٢) = ٣ (٢ م + ٧)

∴ ١٥ م - ٦٠ = ٦ م + ٢١

∴ ١٥ م - ١٥ م = ٢١ + ٦٠

∴ ٩ م = ٨١

∴ م = ٩

∴ العدد الأول = ٢ × ٩ = ١٨

، العدد الثانى = ٣ × ٩ = ٢٧

(٥) عددان النسبة بينهما ٣ : ٤ ، و إذا أضيف للعدد الأول ٤ ، و طرح من الثانى ٣ أصبحت النسبة بينهما ٨ : ٩ أوجد العددين

(٦) عددان حقيقيان موجبان النسبة بينهما ١ : ٢ ، و مربع أصغرهما يزيد عن أربعة أمثال أكبرهما بمقدار ٩ أوجد العددين

(٧) إذا كانت النسبة بين بعدى مستطيل ٢ : ٣ ، و كان محيط المستطيل ٦٠ سم أوجد بعدى المستطيل و مساحته

(٨) إذا كانت النسبة بين طول قاعدة و ارتفاع مثلث ٣ : ٢ ، و كانت مساحة المثلث ٤٨ سم^{٢} أوجد طول القاعدة و الإرتفاع

(٩) إذا كانت النسبة نسبة النجاح بمحافظة أسوان للشهادة الإعدادية ٨٣ ٪ و كانت نسبة نجاح البنين ٧٩ ٪ و نسبة نجاح البنات ٨٩ ٪ أوجد النسبة بين عدد البنين إلى عدد البنات

(١٠) قطعة سلك طولها ١٥٢ سم قسمت إلى جزئين بنسبة ١١ : ٨ ، و صنع من الأول دائرة و من الثانى مربع أوجد النسبة بين مساحة الدائرة إلى مساحة المربع ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

الدرس الثانى : التناسب

تمهيد :

الجدول التالى يوضح مجموعتين من الأعداد :

المجموعة أ	٢	٣	٤	٥	٦	٧
المجموعة ب	٦	٩	١٢	١٥	١٨	٢١

نلاحظ أن : $\frac{٢}{٦} = \frac{٣}{٩} = \frac{٤}{١٢} = \frac{٥}{١٥} = \frac{٦}{١٨} = \frac{٧}{٢١} = \frac{١}{٣}$

و أن : كل عددين متناظرين من المجموعتين يكونان نسبة

فى هذه الحالة يقال أن : أعداد المجموعة أ تتناسب مع الأعداد المناظرة لها فى المجموعة ب

و تسمى هذه الصورة التى تعبر عن تساوى نسبتين أو أكثر : التناسب

تعريف :

التناسب هو تساوى نسبتين أو أكثر

أى أن : إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{ء}$

فإن : الكميات أ ، ب ، جـ ، ء تكون متناسبة ، و بالعكس

إذا كان : أ ، ب ، جـ ، ء كميات متناسبة فإن : $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{ء}$

و يسمى أ (الأول المتناسب) ، ب (الثانى المتناسب) ، جـ (الثالث المتناسب) ، ء (الرابع المتناسب)

كما يسمى أ ، ء (طرفى التناسب) ، ب ، جـ (وسطى التناسب)

خواص التناسب :

أولاً : إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{ء}$ فإن :

١) أ = م جـ ، ب = م ء حيث م $\in$ ح* (ح* = ح − {٠})

فمثلاً :

١] إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{٣}{٤}$

فإن : أ = ٣ م ، ب = ٤ م حيث م ثابت ≠ ٠

لاحظ : إذا كان : $\frac{١٢}{١٦} = \frac{٣}{٤}$

فإن : ١٢ = ٣ × ٤ ، ١٤ = ٤ × ٤ حيث م = ٤

٢] إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{٤}{٧}$ لأيجاد قيمة النسبة $\frac{أ + ٣ ب}{٤ أ + ٢ ب}$

نفرض أن : أ = ٤ م ، ب = ٧ م حيث م ثابت ≠ ٠

$$\therefore \frac{أ + ٣ ب}{٤ أ + ٢ ب} = \frac{٤ م + ٣ \times ٧ م}{٤ \times ٤ م + ٢ \times ٧ م}$$

$$= \frac{٤ م + ٢١ م}{١٦ م + ١٤ م} = \frac{٢٥ م}{٣٠ م} = \frac{٥}{٦}$$

(١) إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{٢}{٥}$ أوجد قيمة النسبة $\frac{٧ أ - ٢ ب}{٣ أ + ب}$

٢) ٲ ء = ب حـ (حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين)

فمثلاً :

ا] إذا كان : $\frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$

فإن : ٦ × ٤ = ٢٤ ، ٣ × ٨ = ٢٤

٢] لإيجاد الثالث المتناسب للكميات : ٨ ، ٩ ، ٢٧

نفرض أن : الثالث المتناسب هو : س

∴ الكميات : ٨ ، ٩ ، س ، ٢٧ متناسبة

∴ $\frac{٨}{٩} = \frac{س}{٢٧}$ ∴ ٨ × ٢٧ = ٩ س

و منها : س = ٢٤

(٢) أوجد الرابع المتناسب للكميات : ٤ ، ١٢ ، ١٦

(٣) أوجد العدد الذى إذا أضيف لكل من الأعداد : ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٢ فإنها تكون متناسبة

(٤) إذا كان : (٢ س + ٣ ص) : (٥ س – ص) = ١ : ٢

أوجد : س : ص ثم أوجد : (س + ٣ ص) : (س – ص)

(٣) $\frac{\text{أ}}{\text{حـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{ء}}$

فمثلاً :

[١] إذا كان : $\frac{٣}{٤} = \frac{٦}{٨}$

فإن : $\frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$ أى أن : $\frac{٣}{٦} = \frac{٤}{٨}$

[٢] إذا كان : $\frac{\text{أ}}{٧} = \frac{\text{ب}}{٣}$ أوجد قيمة $\frac{\text{أ} + \text{ب}}{\text{أ} - \text{ب}}$

∵ $\frac{\text{أ}}{٧} = \frac{\text{ب}}{٣}$ ∴ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{٧}{٣}$

∴ أ = ٧ م ، ب = ٣ م حيث م ثابت $\neq$ ٠

∴ $\frac{\text{أ} + \text{ب}}{\text{أ} - \text{ب}} = \frac{٧\text{م} + ٣\text{م}}{٧\text{م} - ٣\text{م}} = \frac{١٠\text{م}}{٤\text{م}} = \frac{٥}{٢}$

(٥) إذا كان : $\frac{\text{س}}{٤} = \frac{\text{ص}}{٥}$ أوجد قيمة $\frac{٣\text{س} - ٢\text{ص}}{\text{ص} - \text{س}}$

ثانياً : إذا كان : أ ء = ب حـ : فإن :

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{ء}}$ ، $\frac{\text{أ}}{\text{حـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{ء}}$

فمثلاً :

[١] نعلم أن : ٣ × ٨ = ٤ × ٦

فإن : $\frac{٣}{٤} = \frac{٦}{٨}$ ، $\frac{٣}{٦} = \frac{٤}{٨}$

[٢] إذا كان : ٤ س^{٢} + ٩ ص^{٢} = ١٢ س ص أوجد س : ص

∵ ٤ س^{٢} + ٩ ص^{٢} = ١٢ س ص

∴ ٤ س^{٢} − ١٢ س ص + ٩ ص^{٢} = ٠

∴ (٢ س − ٣ ص)^{٢} = ٠ ∴ ٢ س − ٣ ص = ٠

∴ ٢ س = ٣ ص ∴ س : ص = ٣ : ٢

(٦) إذا كان : ٢٥ س^{٢} + ٤ ص^{٢} = ٢٠ س ص أوجد س : ص

ثالثاً : إذا كان : $\frac{ا}{ب} = \frac{حـ}{ء} = \frac{هـ}{و} = ...$ ،

$م_1 ، م_2 ، م_3 ، .... \in ح^*$

فإن : إحدى النسب = $\frac{ا م_1 + حـ م_2 + هـ م_3 + ...}{ب م_1 + ء م_2 + و م_3 + ...}$ أى أن :

إحدى النسب (كل نسبة) = مجموع المقدمات : مجموع التوالى

فمثلاً :

[ا] إذا كان : $\frac{ا}{٥} = \frac{ب}{٣} = \frac{حـ}{٢}$ فإن :

ا) لإيجاد قيم : $\frac{٣ا - ٣ب + ٢حـ}{٣ا - ب - حـ}$

نضرب حدى النسبة الأولى × ٣ ، حدى النسبة الثانية × (− ٣) ، حدى النسبة الثالثة × ٢

و جمع المقدمات و التوالى ينتج :

إحدى النسب = $\frac{٣ا - ٣ب + ٢حـ}{٣ \times ٥ - ٣ \times ٣ + ٢ \times ٢}$

$= \frac{٣ا - ٣ب + ٢حـ}{١٠}$

، و بالمثل نضرب حدى النسبة الأولى × ٣ ، حدى النسبة الثانية × (− ١) ، حدى النسبة الثالثة × (− ١) فينتج :

إحدى النسب = $\frac{٣ا - ب - حـ}{٣ \times ٥ - ١ \times ٣ - ١ \times ٢}$

$= \frac{٣ا - ب - حـ}{١٠}$

$\therefore \frac{٣ا - ٣ب + ٢حـ}{١٠} = \frac{٣ا - ب - حـ}{١٠}$

$\therefore \frac{٣ا - ٣ب + ٢حـ}{٣ا - ب - حـ} = \frac{١٠}{١٠} = ١$

٢) بفرض أن : $\frac{ا}{٥} = \frac{ب}{٣} = \frac{حـ}{٢} = م$ ، م ثابت $\neq ٠$

$\therefore ا = ٥م ، ب = ٣م ، حـ = ٢م$

$\therefore \frac{٣ا - ٣ب + ٢حـ}{٣ا - ب - حـ} = \frac{٣ \times ٥م - ٣ \times ٣م + ٢ \times ٢م}{٣ \times ٥م - ٣م - ٢م} = \frac{١٠م}{١٠م} = ١$

و هى نفس الإجابة التى حصلنا عليها سابقاً

(٧) إذا كان : $\frac{ا}{٣} = \frac{ب}{٤} = \frac{حـ}{٥}$ أثبت أن :

$\frac{٢ب - حـ}{٣ا - ٢ب + حـ} = \frac{١}{٢}$

[٢] إذا كان : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ء}}$ أثبت أن : $\frac{٢\text{أ} + ٣\text{جـ}}{٧\text{أ} - ٤\text{جـ}} = \frac{٢\text{ب} + ٣\text{ء}}{٧\text{ب} - ٤\text{ء}}$

لاحظ : يمكن أن يقال (أ ، ب ، جـ ، ء كميات متناسبة)

١) بفرض أن : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ء}} = \text{م}$ ، م ثابت $\neq ٠$.

∴ أ = ب م ، جـ = ء م

∴ الطرف الأيمن = $\frac{٢\text{ب م} + ٣\text{ء م}}{٧\text{ب م} - ٤\text{ء م}} = \frac{\text{م}(٢\text{ب} + ٣\text{ء})}{\text{م}(٧\text{ب} - ٤\text{ء})}$

$= \frac{٢\text{ب} + ٣\text{ء}}{٧\text{ب} - ٤\text{ء}}$ = الطرف الأيسر

٢) ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ء}}$

بضرب حدى النسبة الأولى × ٢ ، حدى النسبة الثانية × ٣

فإن : إحدى النسب = مجموع المقدمات : مجموع التوالى

∴ إحدى النسب = $\frac{٢\text{أ} + ٣\text{جـ}}{٢\text{ب} + ٣\text{ء}}$ (١)

بضرب حدى النسبة الأولى × ٧ ، حدى النسبة الثانية × (– ٤)

فإن : إحدى النسب = مجموع المقدمات : مجموع التوالى

∴ إحدى النسب = $\frac{٧\text{أ} - ٤\text{جـ}}{٧\text{ب} - ٤\text{ء}}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج : $\frac{٢\text{أ} + ٣\text{جـ}}{٢\text{ب} + ٣\text{ء}} = \frac{٧\text{أ} - ٤\text{جـ}}{٧\text{ب} - ٤\text{ء}}$

∴ $\frac{٢\text{أ} + ٣\text{جـ}}{٧\text{أ} - ٤\text{جـ}} = \frac{٢\text{ب} + ٣\text{ء}}{٧\text{ب} - ٤\text{ء}}$

(٨) إذا كان : أ ، ب ، جـ ، ء كميات متناسبة أثبت أن :

[أ] $\frac{٣\text{أ} - ٤\text{جـ}}{\text{أ} + ٥\text{جـ}} = \frac{٣\text{ب} - ٤\text{ء}}{\text{ب} + ٥\text{ء}}$

[٢] $\frac{٥\text{أ} - ٢\text{جـ}}{٥\text{ب} - ٢\text{ء}} = \frac{٤\text{أ} + ٣\text{جـ}}{٤\text{ب} + ٣\text{ء}}$

(٩) إذا كان : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ء}}$ أثبت أن : $\frac{\text{أ}^{٢} + \text{جـ}^{٢}}{\text{ب}^{٢} + \text{ء}^{٢}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{ب ء}}$

(١٠) إذا كان : س ، ص ، ع ، ل كميات متناسبة

أثبت أن : $\frac{\text{س}^{٢} + \text{ع}^{٢}}{\text{س ص} + \text{ع ل}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$

(١١) إذا كان : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ء}} = \frac{\text{هـ}}{\text{و}}$

أثبت أن : $\frac{٢\text{أ} + ٣\text{جـ} - ٤\text{هـ}}{٢\text{ب} + ٣\text{ء} - ٤\text{و}} = \frac{٥\text{أ} - ٧\text{هـ}}{٥\text{ب} - ٧\text{و}}$

(١٢) إذا كان : $\frac{\text{س}}{٢\text{أ} + \text{ب}} = \frac{\text{ص}}{٢\text{ب} - \text{جـ}} = \frac{\text{ع}}{٢\text{جـ} - \text{أ}}$

أثبت أن : $\frac{٢\text{س} + \text{ص}}{٤\text{أ} + ٤\text{ب} - \text{جـ}} = \frac{٢\text{س} + ٢\text{ص} + \text{ع}}{٣\text{أ} + ٦\text{ب}}$

(١٣) إذا كان : $\frac{أ}{٢س + ص} = \frac{ب}{٣ص - س} = \frac{حـ}{٣ص - س}$

أثبت أن : $\frac{أ + ٢ب}{٤ب + حـ} = \frac{٧}{١٧}$

(١٤) إذا كان : $\frac{س + ص}{٧} = \frac{ص + ع}{٥} = \frac{ع + س}{٦}$

أثبت أن : $\frac{س + ص + ع}{س - ع} = ٥$

(١٥) إذا كان : $\frac{ص}{س - ع} = \frac{س}{ص} = \frac{س + ص}{ع}$ (بشرط س + ص $\neq$ ٠)

أثبت أن : كلاً من هذه النسب تساوى ٢ ثم أوجد س : ص : ع

(١٦) إذا كان : $\frac{أ}{ب - أ} = \frac{حـ}{ء - حـ}$

أثبت أن : أ ، ب ، حـ ، ء كميات متناسبة

أحمد الشتوى

التناسب المتسلسل

تمهيد :

إذا كان لدينا الأعداد : ٣ ، ٦ ، ١٢ و قارنا بين النسب :

$\frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٢}$ نجد أن : $\frac{٣}{٦} = \frac{٦}{١٢}$

و نلاحظ أن :

١) ٣ × ١٢ = ٦ × ٦ أى أن : $٣ \times ١٢ = (٦)^2$

٢) إذا أستبدلنا العدد ٦ بالعدد (– ٦) نجد أن :

$٣ \times ١٢ = (-٦)^2$

٣) الأعداد : ٣ ، ٦ ، ١٢ تكون متناسبة ،

و الأعداد : ٣ ، – ٦ ، ١٢ تكون متناسبة أيضاً

و يسمى التناسب فى هذه الحالة (تناسباً متسلسلاً)

تعريف :

يقال للكميات : أ ، ب ، حـ أنها فى تناسب متسلسل

إذا كان : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{حـ}}$

و يسمى : أ بالأول المتناسب ، ب بالوسط المتناسب ، حـ بالثالث المتناسب

حيث : $\text{ب}^2 = \text{أ حـ}$ أو $\text{ب} = \pm\sqrt{\text{أ} \times \text{حـ}}$

لاحظ أن :

الكميتين أ ، حـ يجب أن تكونا موجبتين معاً أو سالبتين معاً

فمثلاً :

١) الوسط المتناسب بين : ٢ ، ٨

$= \pm\sqrt{٢ \times ٨} = \pm\sqrt{١٦} = \pm ٤$

٢) لإيجاد الثالث المتناسب بين : ٦ ، ٢٤

نفرض أن : الثالث المتناسب هو س

∴ ٩ ، ١٢ ، س فى تناسب متسلسل

∴ $\frac{٩}{١٢} = \frac{١٢}{\text{س}}$ ∴ ٩ س = ١٤٤ ∴ س = ١٦

ملاحظة :

إذا كان : أ ، ب ، حـ فى تناسب متسلسل أو (كميات متناسبة) أو (ب وسط متناسب بين أ ، حـ) و فرضنا أن : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{حـ}} = \text{م}$

فإن : ب = حـ م (١) ، أ = ب م ، بالتعويض من (١) ينتج :

$\text{أ} = \text{ب م} = \text{حـ م} \times \text{م} = \text{حـ م}^2$

فمثلاً :

إذا كان : أ ، ب ، حـ فى تناسب متسلسل أثبت أن : $\frac{\text{أ} - \text{ب}}{\text{ب} - \text{حـ}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$

نفرض أن : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{حـ}} = \text{م}$

∴ ب = حـ م ، $\text{أ} = \text{حـ م}^2$

الطرف الأيمن $= \frac{\text{حـ م}^2 - \text{حـ م}}{\text{حـ م} - \text{حـ}} = \frac{\text{حـ م}(\text{م} - ١)}{\text{حـ}(\text{م} - ١)} = \text{م}$ (١)

الطرف الأيسر $= \frac{\text{حـ م}^2}{\text{حـ م}} = \text{م}$ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الطرفان متساويان

(١٧) إذا كان : أ ، ب ، حـ كميات متناسبة أثبت أن :

[١] $\frac{\text{أ} + ٢\text{ب}}{\text{ب} + ٢\text{حـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{حـ}}$

[٢] $\frac{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}{\text{ب}^{٢} + \text{حـ}^{٢}} = \frac{\text{ب}^{٤}}{\text{أ}\ \text{حـ}^{٣}}$

(١٨) إذا كان : ب وسط متناسب بين أ ، حـ أثبت أن :

[١] $\frac{\text{أ}^{٣} + \text{ب}^{٣}}{\text{ب}^{٣} + \text{حـ}^{٣}} = \frac{\text{أ}^{٢}}{\text{ب}\ \text{حـ}}$

[٢] $\frac{\text{أ}^{٢} + \text{أ}\ \text{ب} + \text{ب}^{٢}}{\text{ب}^{٢} + \text{ب}\ \text{حـ} + \text{حـ}^{٢}} = \frac{\text{أ}}{\text{حـ}}$

ملاحظة :

إذا كان : أ ، ب ، حـ ، ء فى تناسب متسلسل

و فرضنا أن : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{حـ} = \frac{حـ}{ء} = م$

فإن : حـ = ء م (١) ، ب = حـ م ، بالتعويض من (١) ينتج :

$ب = حـ\, م = ء\, م \times م = ء\, م^{2}$ (٢)

، أ = ب م ، بالتعويض من (٢) ينتج :

$أ = ب\, م = ء\, م^{2} \times م = ء\, م^{3}$

فمثلاً :

إذا كان : أ ، ب ، حـ ، ء فى تناسب متسلسل أثبت أن :

$$\frac{أ + ب}{ب + حـ} = \frac{ب + حـ}{حـ + ء}$$

نفرض أن : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{حـ} = \frac{حـ}{ء} = م$

∴ حـ = ء م ، ب = ء م^{2} ، أ = ء م^{3}

الطرف الأيمن $= \frac{ء\, م^{3} + ء\, م^{2}}{ء\, م^{2} + ء\, م} = \frac{ء\, م^{2}(م + ١)}{ء\, م(م + ١)} = م$ (١)

الطرف الأيسر $= \frac{ء\, م^{2} + ء\, م}{ء\, م + ء} = \frac{ء\, م(م + ١)}{ء(م + ١)} = م$ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الطرفان متساويان

(١٩) إذا كان : أ ، ب ، حـ ، ء فى تناسب متسلسل أثبت أن :

[١] $\frac{أ^{2} - ٢\, حـ^{2}}{ب^{2} - ٢\, ء^{2}} = \frac{ب}{ء}$　　　[٢] $\frac{حـ^{2} - ء^{2}}{أ - حـ} = \frac{ب\, ء}{أ}$

(٢٠) إذا كان : ٲ ، ب ، حـ ، ء في تناسب متسلسل أثبت أن :

[١] $\frac{ٲ}{ب + ء} = \frac{حـ^٢}{حـ^٢ ء + ء^٣}$　　**[٢]** $\frac{ٲ ب - حـ ء}{ب^٢ - حـ^٢} = \frac{ٲ + حـ}{ب}$

(٢١) إذا كان : ٣ ، ل ، ١٢ ، م في تناسب متسلسل

أوجد قيمة كل من : ل ، م

(٢٢) إذا كان : س ، ص ، ع أطوال أضلاع متناسبة في مثلث ،

س + ص = ١٢ سم ، ص + ع = ١٨ سم أوجد س : ص

(٢٣) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] إذا كان : $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٥}$ فإن : س = ... ص

[$\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٥}{٣}$ ، ١٥ ، ٢]

[٢] إذا كان : ٨ ، ٦ ، س ، ١٢ متناسبة فإن : س = ...

[٤ ، ٦ ، ١٦ ، ٢٤]

[٣] إذا كان : س ، ٥ ، ٢٧ ، ٤٥ متناسبة فإن : س = ...

[٣ ، ٩ ، ١٥ ، ٢٠]

[٤] إذا كان : ٣ ، أ − ١ ، أ + ١ ، ٥ متناسبة فإن : أ = ...

[٤ ، ± ٤ ، ٨ ، ± ٨]

[٥] إذا كان : $\frac{س}{٢} = \frac{ص}{٣}$ فإن : $\frac{٢ س}{٣ ص}$ = ...

[$\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٤}{٩}$ ، $\frac{٩}{٤}$]

[٦] إذا كان : $\frac{٣ س}{٥ ص} = \frac{١}{٢}$ فإن : $\frac{س}{ص}$ = ...

[$\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٥}{٦}$ ، $\frac{٦}{٥}$]

[٧] إذا كان : ٩ $س^٢$ = ٢٥ $ص^٢$ حيث : س ، ص $\in$ $ح_+$ فإن : س : ص = ...

[٣ : ٥ ، ٥ : ٣ ، ٩ : ٢٥ ، ٢٥ : ٩]

[٨] إذا كان : $\frac{س}{ص} = \frac{٣}{٢}$ فإن : $\frac{س + ص}{س - ص}$ = ...

[٣ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ٥ ، $\frac{٤}{٥}$]

[٩] إذا كان : $\frac{س}{٢} = \frac{ص}{٧} = \frac{٢ س + ص}{أ}$ فإن : أ = ...

[١٦ ، ١١ ، ٩ ، ٥]

[١٠] إذا كان : $\frac{س}{٢} = \frac{ص}{٧}$ ، ٢ س + ٣ ص = ٤٦ فإن : س = ...

[٢ ، ٤ ، ٥ ، ٨]

[١١] إذا كان : ٥ س ، ٢ ، ٣ ص ، ٧ متناسبة فإن : أ = ...

[$\frac{٣}{٧}$ ، $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٦}{٣٥}$]

[١٢] الثالث المتناسب للعددين : ٩ ، − ١٢ هو ....

[− ١٦ ، ٨ ، ١٦ ، − ١٠٨]

[١٣] إذا كان العدد : ٦ هو الوسط المتناسب الموجب للعددين : م ، ٢ فإن : م = ...

[٨ ، ١٢ ، ١٨ ، ٣٦]

[١٤] إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ح} = \frac{ح}{٥} = ٢$ فإن : أ = ...

[١٠ ، ٢٠ ، ٤٠ ، ٢٥٠]

[١٥] العدد الذى إذا أضيف لكل من الأعداد : ١ ، ٣ ، ٦ لتصبح فى تناسب متسلسل هو ....

[١ ، ٢ ، ٣ ، ٤]

[١٦] إذا كان : أ ، ٣ ، ٩ ، ب فى تناسب متسلسل فإن : أ + ب = ...

[١ ، ٢٧ ، ٢٨ ، ٨١]

[١٧] إذا كان : ٧ ، س ، $\frac{١}{ص}$ فى تناسب متسلسل فإن : $س^٢$ ص = ...

[١ ، ٧ ، ١٤ ، $\frac{١}{٧}$]

[١٨] إذا كان : ٢ ، ٦ ، س ، س + ١٥ متناسبة فإن : س = ...

[١ ، ٢ ، ٣ ، ٤]

أحمد الشتوى

الدرس الثالث : التغير الطردى و التغير العكسى

أولاً : التغير الطردى

تمهيد :

إذا تحركت سيارة بسرعة ثابتة (ع) مقدارها ١٠ م / ث ، و كانت المسافة المقطوعة (ف) بالمتر فى زمن قدره (ن) ثانية تعطى من العلاقة : ف = ع ن فإنه يمكن تكوين الجدول التالى ، و تمثيل هذه العلاقة كما بالشكل المقابل

ن	١	٢	٣	٤	٥
ف	١٠	٢٠	٣٠	٤٠	٥٠

و نلاحظ أن :

١) الخط المستقيم الممثل لهذه العلاقة يمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠)

٢) إذا أخذنا أى قيمتين للزمن (ن) و لتكونا : $\text{ن}_{\text{١}} = \text{٢}$ ، $\text{ن}_{\text{٢}} = \text{٥}$

فإن القيمتين المناظرتين لهما للمسافة المقطوعة (ف) تكونا :

$\text{ف}_{\text{١}} = \text{٢٠}$ ، $\text{ف}_{\text{٢}} = \text{٥٠}$ فتكون : نسبة التغير فى الزمن = $\frac{\text{ن}_{\text{١}}}{\text{ن}_{\text{٢}}} = \frac{\text{٢}}{\text{٥}}$ ، نسبة التغير فى المسافة نتيجة التغير فى الزمن = $\frac{\text{ف}_{\text{١}}}{\text{ف}_{\text{٢}}} = \frac{\text{٢٠}}{\text{٥٠}} = \frac{\text{٢}}{\text{٥}}$ أى أن : التغير الذى حدث فى الزمن نتج عنه تغير فى المسافة بنفس النسبة ، و يقال فى هذه الحالة أن العلاقة بين المسافة و الزمن هى علاقة تغير طردى (تناسب طردى)

أو أن المسافة تتغير طردياً بتغير الزمن ، و يعبر عن ذلك بالعلاقة : ف $\propto$ ن و تقرأ (ف تتغير طردياً مع ن)

٣) $\frac{\text{ف}}{\text{ن}} = \text{١٠}$ (مقدار ثابت) أى أن : ف = ١٠ ن

٤) $\frac{\text{ف}_{\text{١}}}{\text{ف}_{\text{٢}}} = \frac{\text{ن}_{\text{١}}}{\text{ن}_{\text{٢}}}$

تعريف :

يقال أن : ص تتغير طردياً مع س و تكتب : ص $\propto$ س إذا كانت : ص = م س (م ثابت $\neq$ ٠)

و إذا أخذ المتغير س القيمتين $\text{س}_{\text{١}}$ ، $\text{س}_{\text{٢}}$ و أخذ المتغير ص القيمتين $\text{ص}_{\text{١}}$ ، $\text{ص}_{\text{٢}}$ على الترتيب فإن : $\frac{\text{ص}_{\text{١}}}{\text{ص}_{\text{٢}}} = \frac{\text{س}_{\text{١}}}{\text{س}_{\text{٢}}}$

ملاحظات :

١) العلاقة السابقة علاقة خطية بين المتغيرين : س ، ص و يمثلها خط مستقيم يمر بنقطة الأصل

٢) إذا كان : ص $\propto$ س فإن : ص = م س و يكون : $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \text{م}$

و كذلك إذا كان : ص = م س فإن : ص $\propto$ س

فمثلاً :

إذا كانت ص $\propto$ س و كانت ص = ٤ عندما س = ٣

لإيجاد قيمة ص عندما س = ٦ نتبع ما يلى :

$\because$ ص $\propto$ س $\therefore$ ص = م س حيث : م ثابت $\neq$ ٠

، $\because$ ص = ٤ عندما س = ٣

∴ ٤ = م × ٣   ∴ م = $\frac{٤}{٣}$

∴ العلاقة بين ص ، س هى : ص = $\frac{٤}{٣}$ س

، عندما س = ٦   فإن : ص = $\frac{٤}{٣}$ × ٦ = ٨

و بطريقة أخرى :

∵ ص ∝ س   ∴ $\frac{ص_{١}}{ص_{٢}} = \frac{س_{١}}{س_{٢}}$

، ∵ $ص_{١}$ = ٤ عندما $س_{١}$ = ٣ ، $س_{٢}$ = ٦

∴ $\frac{٤}{ص_{٢}} = \frac{٣}{٦}$ ∴ $ص_{٢}$ = ٤ × $\frac{٦}{٣}$ = ٨

(١) إذا كانت ص ∝ س و كانت ص = ١٤ عندما س = ٧

أوجد : [١] العلاقة بين ص ، س

[٢] س عندما ص = ٢٠

(٢) إذا كانت ص ∝ س و كانت ص = ١٤ عندما س = ٤٢

أوجد : ص عندما س = ٦٠

(٣) إذا كانت أ تتغير طردياً مع ب و كانت أ = ٤ عندما ب = ١٢

أوجد أ عندما ب = ٣٦

(٤) تسير سيارة بسرعة ثابتة بحيث تتناسب المسافة المقطوعة طردياً مع الزمن ، فإذا قطعت السيارة ١٥٠ كيلومتراً فى ٦ ساعات ، فكم كيلومتراً تقطعها السيارة فى ١٠ ساعات ؟

(٥) إذا كان وزن جسم على الأرض (و) يتناسب طردياً مع وزنه على القمر (م) و كان $و_{١}$ = ١٨٢ كجم ، $م_{١}$ = ٣٥ كجم أوجد $م_{٢}$ عندما $و_{٢}$ = ٣١٢ كجم

لاحظ :

إذا كان : ص = م س فإن : ص ∝ س

فمثلاً :

إذا كان : $\frac{\text{٢١ س − ص}}{\text{٧ س − ع}} = \frac{\text{ص}}{\text{ع}}$ لإثبات أن : ص ∝ ع

نتبع ما يلى :

∵ $\frac{\text{٢١ س − ص}}{\text{٧ س − ع}} = \frac{\text{ص}}{\text{ع}}$

∴ ٢١ س ع − ص ع = ٧ س ص − ص ع

∴ ٧ س ص = ٢١ س ع ∴ ص = ٣ ع ∴ ص ∝ ع

(٦) إذا كان : $\frac{\text{أ + ب}}{\text{٣}} = \frac{\text{٢ ب + حـ}}{\text{٦}}$ أثبت أن : حـ ∝ أ

لاحظ ما يلى :

إذا كان : ص = أ + ٧ وكانت أ تتغير طردياً مع س

و كانت ص = ١١ عندما س = ٢

لإيجاد العلاقة بين ص ، س ، قيمة ص عندما س = ٥

نتبع ما يلى :

∵ أ ∝ س ∴ ص = م س حيث : م ثابت ≠ ٠

، ∵ ص = أ + ٧ ∴ ص = م س + ٧

، ∵ ص = ١١ عندما س = ٢

∴ ١١ = م × ٢ + ٧ ∴ م = ٢ ∴ ص = ٢ س + ٧

و عندما س = ٥ فإن : ص = ٢ × ٥ + ٧ = ١٧

(٧) إذا كان : ص = أ + ٤ وكانت أ تتغير طردياً مع س و كانت ص = ١٩ عندما س = ٥ أوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٢

(٨) إذا كان : ص = أ + ب حيث أ ثابت ، ب تتغير طردياً مع س و كانت ص = ٢ عندما س = ٠ ، ص = ٨ عندما س = ٣ أوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٥

(٩) إذا كان : ٢٥ $س^{٢}$ + ٤ $ص^{٢}$ = ٢٠ س ص

أثبت أن : ص ∝ س

ثانياً : التغير العكسى

تمهيد :

إذا كانت مساحة المستطيل (م) و أحد بعديه (س) و البعد الآخر (ص) و كانت مساحة المستطيل ثابتة و تساوى ٢٤ سم٢ فإن الجدول المقابل يمثل بعض أبعاد هذا المستطيل

س	٢	٣	٤	٦	٨
ص	١٢	٨	٦	٤	٣

نلاحظ ما يلى :

١) إذا أخذنا أى قيمتين للمتغير س و لتكونا : $س_١$ = ٢ ، $س_٢$ = ٦

فإن القيمتين المناظرتين لهما للمتغير ص تكونا : $ص_١$ = ١٢ ، $ص_٢$ = ٤ فتكون نسبة التغير فى (س) = $\frac{س_١}{س_٢}$ = $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$

و نسبة التغير فى (ص) = $\frac{ص_١}{ص_٢}$ = $\frac{١٢}{٤}$ = $\frac{٣}{١}$

، التغير فى (س) هو المعكوس الضربى لنسبة التغير فى (ص) و يقال فى هذه الحالة أن العلاقة بين (ص) ، (س) هى علاقة تغير عكسى (أو تناسب عكسى)

و يعبر عن ذلك بالعلاقة : ص ∝ $\frac{١}{س}$

و تقرأ (ص تتغير عكسياً مع س أو ص تتغير بتغير $\frac{١}{س}$ أو ص تتغير طردياً بتغير المعكوس الضربى لـ س)

٢) س ص = ٢٤ (مقدار ثابت) أى أن : ص = $\frac{٢٤}{س}$

٣) $\frac{ص_١}{ص_٢}$ = $\frac{س_٢}{س_١}$

تعريف :

يقال أن ص تتغير عكسياً مع س و تكتب ص ∝ $\frac{١}{س}$ إذا كانت ص س = م (أى أن : ص = $\frac{م}{س}$ ، حيث : م ثابت ≠ ٠)

و إذا أخذ المتغير س القيمتين $س_١$ ، $س_٢$ و أخذ المتغير ص القيمتين $ص_١$ ، $ص_٢$ على الترتيب فإن : $\frac{ص_١}{ص_٢}$ = $\frac{س_٢}{س_١}$

ملاحظات :

١) العلاقة السابق ليست علاقة خطية بين التغيرين : س ، ص و لا يمثلها خط مستقيم يمر بنقطة الأصل

٢) إذا كان : ص ∝ $\frac{١}{س}$ فإن : ص = $\frac{م}{س}$ و يكون : ص س = م

و كذلك إذا كان : ص س = م فإن : ص ∝ $\frac{١}{س}$

فمثلاً :

إذا كانت ص ∝ $\frac{١}{س}$ و كانت ص = ٤ عندما س = ٣

لإيجاد قيمة ص عندما س = ٦ نتبع ما يلى :

∵ ص ∝ $\frac{١}{س}$ ∴ ص = $\frac{م}{س}$ حيث : م ثابت ≠ ٠ .

، ∵ ص = ٤ عندما س = ٣

∴ ٤ = $\frac{م}{٣}$ و منها : م = ١٢ ∴ ص = $\frac{١٢}{س}$

، عندما س = ٦ فإن : ص = $\frac{١٢}{٦}$ = ٢

و بطريقة أخرى :

∵ ص ∝ $\frac{١}{س}$ ∴ $\frac{ص_١}{ص_٢}$ = $\frac{س_٢}{س_١}$

، ∵ $ص_١ = ٤$ عندما $س_١ = ٣$ ، $س_٢ = ٦$

∴ $\frac{٤}{ص_٢} = \frac{٦}{٣}$ ∴ $ص_٢ = ٤ \times \frac{٣}{٦} = ٢$

(١٠) إذا كان : ص ∝ $\frac{١}{س}$ و كانت ص = ١٠ عندما س = ٣

أوجد : **[١]** العلاقة بين ص ، س

[٢] قيمة ص عندما س = ٥

(١١) إذا كان : ص تتغير عكسياً مع س و كانت ص = ٤ عندما س = ٩

أوجد : **[١]** العلاقة بين ص ، س

[٢] قيمة س عندما ص = ١٢



(١٢) إذا كان : $س^٢ ص^٢ + ٤٩ = ١٤ س ص$

أثبت أن : ص تتغير عكسياً مع س

(١٣) إذا كان مقدار السرعة (ع) التى يخرج بها الماء من فوهة خرطوم يتناسب عكسياً بتغير مربع طول نصف قطر فوهة الخرطوم (نق) و كانت ع = ٥ سم / ث عندما نق = ٣ سم أوجد ع عندما نق = ٢,٥ سم

(١٤) إذا كان عدد الساعات (ن) اللازمة لإنجاز عمل ما يتناسب عكسياً مع عدد العمال (س) الذين يقومون بهذا العمل ، فإذا أنجز العمل ٦ عمال فى ٤ ساعات أوجد الزمن الذى يستغرقه ٨ عمال لإنجاز هذا العمل

(١٥) من بيانات الجدول التالى أجب عن ما يلى :

س	٢	٤	٦
ص	٦	٣	٢

[١] نوع التغير ص ، س
[٢] أوجد ثابت التناسب
[٣] أوجد قيمة ص عندما س = ٣
[٤] أوجد قيمة س عندما ص = ١٢

(١٦) من بيانات الجدول التالى أجب عن ما يلى :

س	١	٤	٦
ص	١٢	٤٨	٧٢

[١] نوع التغير ص ، س
[٢] أوجد ثابت التناسب
[٣] أوجد قيمة ص عندما س = ٢
[٤] أوجد قيمة س عندما ص = ٣٦

(١٧) إذا كانت س = ع + ٨ وكانت ع تتغير عكسياً مع ص و كانت ع = ٢ عندما ص = ٣ أوجد العلاقة بين س ، ص ثم أوجد قيمة س عندما ص = ٣

(١٨) إذا كانت ص = أ + ٧ وكانت أ تتغير عكسياً مع مربع س و كانت أ = ١٨ عندما س = $\frac{٢}{٣}$ أوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٢

(١٩) إذا كانت ص = أ − ٢ وكانت أ $\propto$ $\frac{١}{س^{٢}}$ و كانت ص = ١٤ عندما س = ١ أثبت أن : س^{٢} ص = ١٦ − ٢ س^{٢} ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٢

(٢٠) إذا كانت ص = أ − ٩ وكانت ص تتغير عكسياً مع مربع س و كانت أ = ١٨ عندما س = $\frac{٢}{٣}$ أوجد العلاقة بين ص ، س ثم أوجد قيمة ص عندما س = ١

(٢١) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] العلاقة التى تمثل تغير طردى بين المتغريين س ، ص هى ....

[س ص = ٧ ، ص = س + ٧ ، $\frac{س}{٣} = \frac{٤}{ص}$ ، $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٣}$]

[٢] العلاقة التى تمثل تغير عكسى بين المتغريين س ، ص هى ....

[س ص = ٧ ، ص = ٧ س ، ص = س + ٧ ، $\frac{س}{ص} = ٧$]

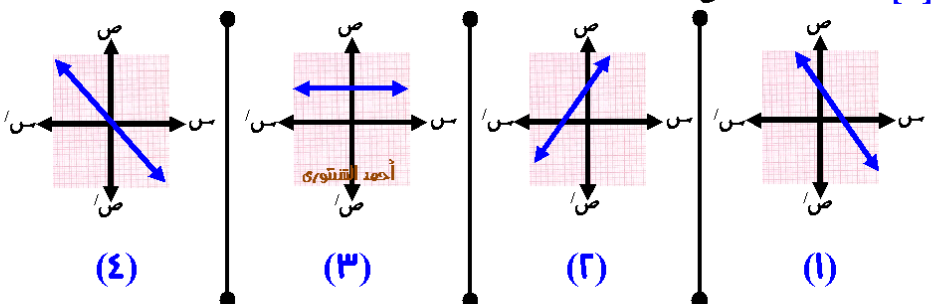
[٣] إذا كانت ص تتناسب عكسياً مع س و كانت س = $\sqrt{٣}$ عندما ص = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ فإن : ثابت التناسب يساوى ....

[١ ، ٢ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢}{٣}$]

[٤] إذا كانت التكلفة الكلية (ص) لرحلة ما بعضها ثابت (أ) و الآخر يتغير بتغير المشتركين (س) فإن : ....

[ص = أ س ، ص = $\frac{أ}{س}$ ، ص = أ + $\frac{م}{س}$: حيث م ثابت ≠ ٠ ، ص = أ + م س حيث : م ثابت ≠ ٠]

[٥] الشكل البيانى الذى يمثل التغير الطردى بين س ، ص هو ....



[٦] إذا كان : س ص = ٥ فإن ص ∝ ....

[س ، $\sqrt{س}$ ، $\frac{١}{س}$ ، $\frac{١}{س^{٢}}$]

[٧] إذا كان : ص = ٥ س فإن : ص ∝ ....

[س ، $\sqrt{س}$ ، $\frac{١}{س}$ ، $\frac{١}{س^{٢}}$]

[٨] إذا كانت ص ∝ س و كانت ص = ٨ عندما س = ٢

فإن : س = ... عندما ص = ١٢

[١ ، ٢ ، ٣ ، ٤]

[٩] إذا كانت ص ∝ $\frac{١}{س}$ و كانت ص = ٨ عندما س = ٢

فإن : ص = ... عندما س = ٤

[٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦]

[١٠] إذا كان : ص − س = $\frac{١}{س} - \frac{١}{ص}$ حيث : س ≠ ص ≠ ٠

فإن : ص ∝ ....

[س ، س + ١ ، $\frac{١}{س}$ ، $\frac{١}{س^{٢}}$]

[١١] إذا كان : ص ، س كميتين متغيرتين و كان : $\frac{ص_{١} س_{١}}{ص_{٢} س_{٢}} = ٢$

فإن : ص ∝ ....

[س ، $س^{٢}$ ، $\frac{١}{س}$ ، $\frac{١}{س^{٢}}$]

الوحدة الثانية الإحصاء

الدرس الأول : جمع البيانات

تمهيد :

تعتبر طريقة جمع البيانات من أهم المراحل التى يعتمد عليها البحث الإحصائى ، كما أن جمع البيانات بأسلوب علمى صحيح يترتب عليه الوصول إلى نتائج دقيقة عند القيام بعمليات الإستدلال الإحصائى و إتخاذ القرارات المناسبة لذلك يجب اتباع أسلوب علمى صحيح فى جمع البيانات ، و جمع البيانات الإحصائية يتطلب معرفة مصادر جمع هذه البيانات و تحديد أسلوب جمعها

مصادر جمع البيانات :

	المصادر الأولية (الميدانية)	المصادر الثانوية (التاريخية)
تعريفها	هى المصادر التى نحصل منها على البيانات بشكل مباشر	المصادر التى يتم الحصول عليها من أجهزة أو هيئات رسمية
أمثلة	١) المقابلة الشخصية ٢) الاستبيان و استطلاع الرأى ٣) الملاحظة و القياس	١) نشرات الجهاز المركزى للتعبئة و الإحصاء ٢) الإنترنت و وسائل الإعلام
مميزاتها	الدقة	توفير الوقت و الجهد و المال
عيوبها	تحتاج إلى وقت و مجهود كبير ، كما أنها مكلفة مادياً	عدم الدقة أحياناً لبعض المصادر

أسلوب جمع البيانات :

يتحدد أسلوب جمع البيانات تبعاً للهدف و حجم المجتمع الإحصائى محل البحث

(و يعرف المجتمع الإحصائى بأنه جميع المفردات التى يجمعها خصائص عامة واحدة)

و من أساليب جمع البيانات :

	أسلوب الحصر الشامل	أسلوب العينات
الأساس الذى يقوم عليه	يقوم على جمع البيانات المتعلقة بالظاهرة محل الدراسة من جميع مفردات المجتمع الإحصائى و يستخدم لحصر جميع مفردات المجتمع	يقوم على جمع البيانات المتعلقة بالظاهرة محل الدراسة من عينة ممثلة للمجتمع كله و اجراء البحث عليها ثم تعميم النتائج على المجتمع كله
أمثلة	الانتخابات ، التعداد العام للسكان	عينة من دم مريض ، عينة من بعض منتجات مصنع
مميزاته	١) الدقة ٢) الشمول ٣) عدم التحيز ٤) التمثيل التام لكل مفردات المجتمع الإحصائى	١) توفير الوقت و الجهد و التكاليف ٢) الطريقة الوحيدة لجمع البيانات عن المجتمعات الكبيرة ٣) الطريقة الوحيدة لدراسة بعض المجتمعات المحدودة فى بعض الأحيان
عيوبه	يحتاج إلى وقت و مجهود كبير و تكلفة باهظة	عدم الدقة إذا كانت العينة لا تمثل المجتمع تمثيلاً صادقاً و تسمى بالعينة المتحيزة

كيفية اختيار العينات و الشروط الواجب توافرها فى العينة :

أولاً : الاختيار المتحيز (العينات غير العشوائية) :

و يعنى اختيار مفردات بعينها من مفردات المجتمع الإحصائى دون غيرها بطريقة تناسب أهداف البحث و تعرف بالعينة العمدية

ثانياً : الاختيار العشوائى (العينات العشوائية) :

و يعنى اختيار عينة من مفردات المجتمع الإحصائى بحيث تكون ظهور أى من المجتمع فيها متساوية

أنواع العينات العشوائية :

ا] العينة العشوائية البسيطة :

هى أبسط أنواع العينات و يتم سحبها من المجتمعات المتجانسة و يتوقف اختيارها على حجم و عدد وحدات المجتمع

و يتم اختيارها بطريقتين :

١) إذا كان حجم المجتمع صغيراً :

تعطى كل مفردة فى مجتمع الدراسة بطاقة (أو قصاصة ورق) متماثلة مكتوباً عليها أسمه أو رقمه و توضع كل البطاقات فى صندوق أو كيس و تخلط جيداً و تسحب بطاقة من الصندوق عشوائياً ثم تعاد البطاقة مرة أخرى للصندوق و تكرر هذه العملية حتى يتم اختيار العينة المطلوبة

٢) إذا كان حجم المجتمع كبيراً :

يتم ترقيم جميع مفردات المجتمع ثم تختار العينة من هذه المفردات و تستخدم الآلة الحاسبة أو برنامج اكسيل فى إنتاج أرقام عشوائية فى النطاق من ٠,٠٠٠ إلى ٠,٩٩٩ ليصبح النطاق من صفر إلى ٩٩٩ مع إهمال العلامة العشرية كما تستبعد الأرقام الأكبر من عدد مجتمع الدراسى

لاحظ :

إذا كان حجم المجتمع ٤٠٠ و يراد اختيار عينة عشوائية ١٠٪

يتم تحديد أرقام أفراد المجتمع المستهدفين فى هذه العينة بالآلة الحاسبة كما ما يلى :

∵ عدد أفراد المجتمع = ٤٠٠ فرد

∴ عدد العينة العشوائية = $\frac{١٠}{١٠٠}$ × ٤٠٠ = ٤٠ فرداً

أى أننا نريد اختيار ٤٠ فرداً يتم اختيارهم و تستخدام الآلة الحاسبة كما يلى :

١) نعطى كل فرد رقماً من ١ إلى ٤٠٠

٢) نستخدم الآلة الحاسبة لإنتاج أرقام عشوائية عن طريق مفتاح الأعداد العشرية و يتم ذلك بالضغط على المفاتيح التالية بالترتيب من اليسار إلى اليمين : On Shift Ran # =

و مع تكرار الضغط على = تتوالى ظهور الأرقام فنكرر ذلك ٤٠ مرة لتظهر أرقام عشوائية فى النطاق من ٠,٠٠١ إلى ٠,٤٠٠ ليصبح النطاق من ١ إلى ٤٠٠ و نحذف العلامة العشرية :

فالعدد : ٠,٠٣٥ يعنى أن رقم الفرد المختار هو ٣٥

و العدد : ٠,١٦٨ يعنى أن رقم الفرد المختار هو ١٦٨

و العدد : ٠,٢٧ يعنى أن رقم الفرد المختار هو ٢٧٠

أما العدد : ٠,٥٠٩ يستبعد لأن ٥٠٩ خارج نطاق الأعداد من ١ إلى ٤٠٠

ثم نحدد أفراد المجتمع الذين ظهرت أرقامهم

فمثلاً :

ترغب إدارة أحد المصانع فى معرفة آراء ٣٠٠ عامل بالمصنع فى نظام ساعات العمل الإضافى من خلال استبيان تم إعداده لهذا الغرض يعطى هذا الاستبيان لعينة عشوائية ١٠ ٪ من إجمالى عدد العاملين بالمصنع لتحديد أرقام العاملين المستهدفين فى هذه العينة بالآلة الحاسبة نتبع ما يلى :

∵ عدد العاملين بالمصنع = ٣٠٠ عامل

∴ عدد العينة العشوائية = $\frac{١٠}{١٠٠}$ × ٣٠٠ = ٣٠ عاملاً

يتم استخدام الآلة الحاسبة فى انتاج أرقام عشوائية فى النطاق من ٠,٠٠١ إلى ٠,٣٠٠ ليصبح النطاق من ١ إلى ٤٠٠

(١) قامت إحدى المدارس بدراسة عن كيفية ذهاب التلاميذ إلى المدرسة فإذا كان عدد التلاميذ ٣٣٠ تلميذاً و تم إعطاء كل تلميذ رقماً من ١ إلى ٣٣٠ ، و تم إختيار ١٠ ٪ لسؤالهم عن طريقة الوصول للمدرسة ما بين : سيراً على الأقدام ، أتوبيس عام ، تاكسى ، دراجة ، سيارة خاصة حدد بإستخدام الآلة الحاسبة أرقام التلاميذ المستهدفين فى هذه العينة

(٢) قامت إدارة أحد المصانع بإستطلاع آراء ٢٠٠ عامل لمعرفة ما يفضلون تناوله فى فترة الراحة و تم إعطاء رقم لكل عامل من ١ إلى ٢٠٠ تم إختيار ١٠ ٪ لسؤالهم عما يفضلون من : مشروبات ساخنة ، وجبات خفيفة ، مثلجات حدد بإستخدام الآلة الحاسبة أرقام العمال المستهدفين فى هذه العينة

(٣) ترغب إدارة أحد الفنادق فى معرفة آراء ٣٠٠ نزيل بالفندق فى مستوى الخدمة المقدمة لهم فقامت بإعطاء كل نزيل رقماً من ٢٠١ إلى ٥٠٠ ، و إختيار ١٠ ٪ منهم كعينة عشوائية لسؤالهم عن مستوى الخدمة حدد بإستخدام الآلة الحاسبة أرقام النزلاء المستهدفين فى هذه العينة

٢] العينة العشوائية الطبقية :

عندما يكون المجتمع محل الدراسة غير متجانس (أى يتكون من مجموعات نوعية تختلف فى الصفات) يقسم المجتمع إلى مجموعات متجانسة تبعاً للصفات المكونة له ، و تسمى كل مجموعة بطبقة ، و يختار الباحث عينة عشوائية تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها فى المجتمع

و يستخدم القانون :

$$\text{عدد مفردات الطبقة فى العينة} = \frac{\text{عدد مفردات الطبقة الكلى}}{\text{عدد مفردات المجتمع الكلى}} \times \text{عدد مفردات العينة}$$

(مقرباً الناتج لأقرب وحدة)

فمثلاً :

إذا كان بإحدى الكليات الجامعية ٤٠٠٠ طالب بالسنة الأولى ، ٣٠٠٠ طالب بالسنة الثانية ، ٢٠٠٠ طالب بالسنة الثالثة ، ١٠٠٠ طالب بالسنة الرابعة و أردنا سحب عينة طبقية حجمها ٥٠٠ طالب تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها لحساب عدد مفردات كل طبقة فى العينة نتبع ما يلى :

العدد الكلى للطلاب = ١٠٠٠٠ طالب

عدد مفردات الطبقة الأولى = $\frac{٤٠٠٠}{١٠٠٠٠} \times ٥٠٠ = ٢٠٠$ طالب

عدد مفردات الطبقة الثانية = $\frac{٣٠٠٠}{١٠٠٠٠} \times ٥٠٠ = ١٥٠$ طالب

عدد مفردات الطبقة الثالثة = $\frac{٢٠٠٠}{١٠٠٠٠} \times ٥٠٠ = ١٠٠$ طالب

عدد مفردات الطبقة الرابعة = $\frac{١٠٠٠}{١٠٠٠٠} \times ٥٠٠ = ٥٠$ طالب

(٤) مدرسة بها ٣٦٠ طالباً و ٤٨٠ طالبة أرادت المدرسة عمل استبيان على عينة قوامها ٣٥ طالباً و طالبة تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها ، أحسب عدد مفردات كل طبقة من العينة

(٥) مصنع به ١٢٥ عاملاً ، ٧٥ فنياً ، ٥٠ مهندساً و يراد أخذ عينة طبقية حجمها ٥٠ فرداً تمثل فيها كل طبقة بحسب حجمها ، أحسب عدد مفردات كل طبقة من العينة

(٦) يراد سحب عينة عشوائية طبقية تمثل فيها كل طبقة حسب حجمها من مجتمع مكون من ٥٠٠٠ مفردة و مقسم إلى طبقتين تعداد الطبقة الأولى منهما ١٥٠٠ مفردة فإذا كانت المفردات التمثل الطبقة الثانية بالعينة ١٤٠ مفردة أحسب عدد المفردات الكلية للعينة

(٧) يراد سحب عينة عشوائية طبقية تمثل فيها كل طبقة حسب حجمها من مجتمع مكون من ٤٠٠٠٠ مفردة و مقسم إلى ثلاث طبقات بيانها كما بالجدول المقابل :

رقم الطبقة	١	٢	٣
عدد مفردات الطبقة	١٢٠٠٠	٢٠٠٠٠	٨٠٠٠

فإذا كان عدد مفردات الطبقة الأولى ٢٤٠ مفردة أوجد حجم العينة كلها

(٨) يراد سحب عينة عشوائية طبقية تمثل فيها كل طبقة حسب حجمها من مجتمع مكون من ٦٠٠٠٠ مفردة و مقسم إلى أربع طبقات بيانها كما بالجدول المقابل :

رقم الطبقة	١	٢	٣	٤
عدد مفردات الطبقة	٢٤٠٠٠	٢٠٠٠٠	١٠٠٠٠	٦٠٠٠

فإذا كان عدد مفردات الطبقة الثانية ٤٠٠ مفردة أوجد حجم العينة كلها

(٩) مجتمع به ٢٠٠٠ مفردة مقسمة إلى أربع طبقات يراد سحب عينة عشوائية طبقية تمثل فيها كل طبقة حسب حجمها كما بالجدول التالى :

رقم الطبقة	١	٢	٣	٤	الإجمالى
عدد مفردات الطبقة	٥٠٠	٧٠٠	....	٤٥٠	٢٠٠٠
عدد المفردات التى تمثل الطبقة فى العينة	....	....	٧	....	....

أكمل الجدول

الدرس الثانى : التشتت

نعلم أن :

كل من (الوسط الحسابى و الوسيط و المنوال) من مقاييس النزعة المركزية ، و يمكن حسابها لأية مجموعة من البيانات لتعيين قيمة تصف اتجاه هذه البيانات فى التمركز حول هذه القيمة

فمثلاً :

إذا كان : الأجر الأسبوعى بالجنيهات لمجموعتين من العمال (أ) ، (ب) فى أحد المصانع كما يلى :

مجموعة (أ) : ١٧٠ ، ١٨٠ ، ١٨٠ ، ٢٣٠ ، ٢٤٠

مجموعة (ب) : ٥٠ ، ١٨٠ ، ١٨٠ ، ١٩٠ ، ٤٠٠ فإن :

تذكر : الوسط الحسابى لمجموعة من القيم يتعين من العلاقة :

الوسط الحسابى لمجموعة من القيم = $\frac{\text{مجموع هذه القيم}}{\text{عدد هذه القيم}}$

∴ الوسط الحسابى لأجور المجموعة (أ) =

$\frac{١٧٠ + ١٨٠ + ١٨٠ + ٢٣٠ + ٢٤٠}{٥}$ = ٢٠٠ جنيه

، الوسط الحسابى لأجور المجموعة (ب) =

$\frac{٥٠ + ١٨٠ + ١٨٠ + ١٩٠ + ٤٠٠}{٥}$ = ٢٠٠ جنيه

الوسيط لمجموعة من القيم هو القيمة التى تتوسط مجموعة القيم بعد ترتيبها ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً

∴ الوسيط للمجموعة (أ) = ١٨٠

، الوسيط المجموعة (ب) = ١٨٠

المنوال لمجموعة من القيم هو القيمة الأكثر تكراراً بين القيم

∴ المنوال للمجموعة (أ) = ١٨٠

، المنوال المجموعة (ب) = ١٨٠

مما سبق نلاحظ أن :

١) مجموعتى الأجور مختلفتان و لكن لهما نفس مقاييس النزعة المركزية

٢) أجور المجموعة (أ) متقاربة فتنحصر مفرداتها بين : ١٧٠ ، ٢٤٠ جنيهاً ، بينما أجور المجموعة (ب) متباعدة فتنحصر مفرداته بين : ٥٠ ، ٤٠٠ جنيهاً

أى أن : أجور المجموعة (ب) أكثر تشتتاً من أجور المجموعة (أ)

لذلك : عند المقارنة بين مجموعتين يجب مراعاة تشتت قيم المجموعتين و تباعدها عن بعضها

التشتت :

التشتت لأى مجموعة من القيم يقصد به التباعد أو الإختلاف بين مفرداتها ،

و يكون التشتت : صغيراً إذا كان الإختلاف بين المفردات قليلاً (أى إذا كانت الفروق بين القيم صغيرة)

و يكون التشتت : كبيراً إذا كان الإختلاف بين المفردات كبيراً (أى إذا كانت الفروق بين القيم كبيرة)

و يكون التشتت : صفراً إذا تساوت جميع المفردات (أى إذا كانت الفروق بين القيم صغيرة)

أى أن : التشتت هو مقياس يعبر عن مدى تجانس المجموعات

مما سبق نستنتج أنه :

لمقارنة مجموعتين أو أكثر من البيانات يلزم وجود مقياس للنزعة المركزية و آخر للتشتت لكل مجموعة

مقاييس التشتت :

١] المدى :

هو الفرق بين أكبر المفردات و أصغرها فى المجموعة

فمثلاً :

بمقارنة المجموعتين التاليتين :

المجموعة الأولى : ٢ ، ٦ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ١٦

المجموعة الثانية : ١٢ ، ١٤ ، ١٠ ، ١٥ ، ١٣ ، ١٦

نجد أن : مدى المجموعة الأولى = ٢٠ − ٢ = ١٨

مدى المجموعة الثانية = ١٦ − ١٠ = ٦

و على هذا تعتبر المجموعة الأولى أكثر تشتتاً

ملاحظات :

١) المدى هو أبسط و أسهل طرق قياس التشتت

٢) المدى يتأثر كثيراً بالقيم المتطرفة

فمثلاً : لمجموعة القيم : ٢١ ، ٢٢ ، ٦١ ، ٢٥ ، ٢٤

المدى = ٦١ − ٢١ = ٤٠ بينما عند استبعاد المفردة الكبرى (٦١) فإن : المدى = ٢٦ − ٢١ = ٥

أى : $\frac{1}{8}$ المدى السابق

٣) نظراً لعدم تأثر المدى بأى مفردة فى المجموعة عدا المفردتين الكبرى و الصغرى فقد لا يعطى صورة صادقة لتشتت المجموعة

٢] الانحراف المعيارى :

هو أكثر مقاييس التشتت انتشاراً و أدقها (تحت ظروف خاصة) ، و هو الجذر التربيعى الموجب لمتوسط مربعات إنحرافات القيم عن وسطها الحسابى

أى أن :

$$\text{الانحراف المعيارى } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ}(س - \bar{س})^2}{ن}}$$

حيث ترمز : σ (سيجما) إلى الانحراف المعيارى

، $\bar{س}$ (سين بار) إلى الوسط الحسابى لمفردات المجتمع

، $\bar{س} = \frac{\text{مجـ}\,س}{ن}$

، ن إلى عدد المفردات ، مجـ إلى عملية الجمع

لاحظ أن : $س - \bar{س}$ تعنى انحراف القيم عن الوسط الحسابى

أولاً : حساب الانحراف المعيارى لمجموعة من المفردات :

فمثلاً :

لحساب الانحراف المعيارى للقيم : ٨ ، ٩ ، ٧ ، ٦ ، ٥

نكون الجدول المقابل حيث :

الوسط الحسابى = $\bar{س}$

$= \frac{35}{7} = 7$

س	$س - \bar{س}$	$(س - \bar{س})^2$
٨	٨ − ٧ = ١	١
٩	٩ − ٧ = ٢	٤
٧	٧ − ٧ = ٠	٠
٦	٦ − ٧ = −١	١
٥	٥ − ٧ = −٢	٤
٣٥	المجموع	١٠

الانحراف المعيارى = σ

$= \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2} = 1{,}4$

(١) أحسب الانحراف المعيارى للقيم : ١٢ ، ١٣ ، ١٦ ، ١٨ ، ٢١

(٢) أحسب الانحراف المعيارى للقيم : ١٦ ، ٣٢ ، ٥ ، ٢٠ ، ٢٧

(٣) أحسب الانحراف المعيارى للقيم : ٢٩ ، ٣٠ ، ٣٠ ، ٣٥

(٤) أحسب الانحراف المعيارى للقيم : ١٥ ، – ١٢ ، – ٩ ، – ٦ ، ٢٧

(٥) أحسب الوسط الحسابى و الانحراف المعيارى لكل من :

المجموعة (أ) : ٧٠ ، ٧٠ ، ٦٥ ، ٦١ ، ٦٤ ، ٧٦ ، ٧٠

المجموعة (ب) : ٧٧ ، ٩١ ، ٣٩ ، ٥٠ ، ٨٥ ، ٧٧ ، ٤٦

أى المجموعتين (أ) ، (ب) أكثر تجانساً

(٦) الجدول المقابل يبين درجات الحرارة فى بعض المدن

[١] أحسب الانحراف المعيارى لدرجة الحرارة العظمى

[٢] أحسب الانحراف المعيارى لدرجة الحرارة الصغرى

المدينة	عظمى	صغرى
الإسماعيلية	٢٥	١١
السويس	٢٦	١٢
العريش	٢٤	١٠
نخل	٢٤	٦
طابا	٢٢	٧
الطور	٢٦	١٦
الغردقة	٢٧	١٥
رفح	٢٦	١١

أحمد الشتوى

ثانياً : حساب الانحراف المعيارى لتوزيع تكرارى :

لأى توزيع تكرارى يكون :

$$\text{الانحراف المعيارى } \sigma = \sqrt{\frac{\text{مجـ } (\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢} \text{ ك}}{\text{مجـ ك}}}$$

حيث : س تمثل القيمة أو مركز المجموعة (فى حالة التويع التكرارى ذى المجموعات)

تذكر :

$$\text{مركز المجموعة} = \frac{\text{حدها الأدنى} + \text{حدها الأعلى}}{٢}$$

ك تكرار القيمة أو المجموعة

مجـ ك مجموع التكرارات

$$\text{الوسط الحسابى } \bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س ك}}{\text{مجـ ك}}$$

فمثلاً :

(١) لحساب الانحراف المعيارى للتوزيع التكرارى التالى الذى يبين عدد أطفال بعض الأسر فى إحدى المدن الجديدة :

عدد الأطفال	صفر	١	٢	٣	٤
عدد الأسر	٨	١٦	٥٠	٢٠	٦

نعتبر عدد الأطفال : س ، و عدد الأسر : ك

ثم نكون الجدول التالى :

س	ك	س × ك	س − $\bar{\text{س}}$	$(\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢}$	$(\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢}$ × ك
٠	٨	٠	−٢	٤	٣٢
١	١٦	١٦	−١	١	١٦
٢	٥٠	١٠٠	٠	٠	٠
٣	٢٠	٦٠	١	١	٢٠
٤	٦	٢٤	٢	٤	٢٤
مجـ	١٠٠	٢٠٠			٩٢

$$\text{الوسط الحسابى } \bar{\text{س}} = \frac{٢٠٠}{١٠٠} = ٢ \text{ طفل}$$

$$\text{الانحراف المعيارى } \sigma = \sqrt{\frac{٩٢}{١٠٠}} \approx ١ \text{ طفل}$$

ملاحظات :

١) يتأثر الانحراف المعيارى بانحرافات جميع القيم و بالتالى تتأثر قيمته بالقيم المتطرفة

٢) الانحراف المعيارى له نفس وحدة قياس البيانات الأصلية لذلك يستخدم فى المقارنة بين تشتت المجموعات التى لها نفس وحدات القياس عند تساويها فى الوسط الحسابى و تكون المجموعة الأكبر فى الانحراف المعيارى هى الأكثر تشتتاً

(٢) لحساب الانحراف المعيارى للتوزيع التكرارى ذى المجموعات التالى الذى يبين درجات الحرارة فى بعض المدن :

المجموعات	٥ −	١٥ −	٢٥ −	٣٥ −	٤٥ −
التكرار	٧	٩	١١	١٥	٨

نعتبر : س مركز المجموعة فيكون :

مركز المجموعة الأولى = $\frac{٥ + ١٥}{٢}$ = ١٠ ، و هكذا

ثم نكون الجدول التالى :

المجموعات	ك	س	س × ك	س − $\overline{س}$	$(س - \overline{س})^٢$	$(س - \overline{س})^٢$ × ك
٥ −	٧	١٠	٧٠	− ٢١,٦	٤٦٦,٥٦	٣٢٦٥,٩٢
١٥ −	٩	٢٠	١٨٠	− ١١,٦	١٣٤,٥٦	١٢١١,٠٤
٢٥ −	١١	٣٠	٣٣٠	− ١,٦	٢,٥٦	٢٨,١٦
٣٥ −	١٥	٤٠	٦٠٠	٨,٤	٧٠,٥٦	١٠٥٨,٤
٤٥ −	٨	٥٠	٤٠٠	١٨,٤	٣٣٨,٥٦	٢٧٠٨,٤٨
مج	٥٠		١٥٨٠	أحمد الشتوى		٨٢٧٢

الوسط الحسابى $\overline{س}$ = $\frac{١٥٨٠}{٥٠}$ = ٣١,٦ درجة

الانحراف المعيارى σ = $\sqrt{\frac{٨٢٧٢}{٥٠}}$ = ١٢,٩ درجة

(٧) التوزيع التكرارى التالى يوضح عدد اللأهداف التى سجلت فى عدد مباريات كرة القدم

عدد الأهداف	صفر	١	٢	٣	٤	٥	٦
عدد المباريات	١	٤	٦	٩	٥	٣	٢

أوجد الانحراف المعيارى لعدد الأهداف

(٨) التوزيع التكرارى التالى يبين عدد الوحدات التالفة التى وجدت فى ١٠٠ صندوق فى الوحدات المصنعة

عدد الوحدات التالفة	صفر	١	٢	٣	٤	٥
عدد الصناديق	٢	١٦	١٧	٢٥	٢٠	١٦

أوجد الانحراف المعيارى للوحدات التالفة



(٩) التوزيع التكرارى التالى يبين أعمار ١٠ أطفال

العمر بالسنوات	٥	٨	٩	١٠	١٢
عدد الأطفال	١	٢	٣	٣	١

أوجد الانحراف المعيارى للعمر بالسنوات

(١٠) للتوزيع التكرارى التالى :

المجموعات	صفر –	٤ –	٨ –	١٢ –	١٦ –
التكرار	٣	٤	٧	٢	٩

أوجد الانحراف المعيارى



(١١) الجدول التالى يبين درجات أحد الطلاب فى مادة الرياضيات خلال العام الدراسى :

الشهر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر	فبراير	مارس	أبريل
الدرجة	٣٦	٤٠	٤٢	٣٨	٤٦	٤٤

أوجد الانحراف المعيارى للدرجات

(١٢) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] اختيار عينة من طبقات المجتمع الإحصائى تسمى بالعينة ....

[العشوائية ، الطبقية ، العمدية ، العنقودية]

[٢] الفرق بين أكبر قيمة و أصغر قيمة لمجموعة من البيانات هو ....

[المدى ، الوسط الحسابى ، الوسيط ، الانحراف المعيارى]

[٣] إذا كان : مجـ (س – $\bar{س}$)^٢ = ٣٦ لمجموعة من القيم عددها ٩ فإن : σ = ...

[٢٧ ، ١٨ ، ٤ ، ٢]

[٤] الوسط الحسابى لمجموعة القيم : ٧ ، ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٩ هو ....

[٣ ، ٤ ، ٦ ، ١٢]

[٥] المدى لمجموعة القيم : ٨ ، ٣ ، ١٠ ، ٥ ، ١٢ هو ....

[٣ ، ٤ ، ٩ ، ١٠]

[٦] الجذر التربيعى الموجب الموجب لمتوسطات مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى يسمى ....

[المدى ، الوسط الحسابى ، الوسيط ، الانحراف المعيارى]

[٧] إذا كانت ٧٨ هى أكبر مفردات مجموعة ما و كان المدى يساوى ٣٩ فإن أصغر مفردات هذه المجموعة يساوى ....

[٢ ، ٤ ، ٣٩ ، ٧٨]

[٨] إذا كانت جميع قيم المفردات متساوية فى القيمة فإن :

[$\bar{س}$ = ٠ ، σ = ٠ ، س – $\bar{س}$ > ٠ ، س – $\bar{س}$ < ٠]

[٩] أبسط و أسهل مقياس للتشتت هو ....

[المدى ، الوسط الحسابى ، الوسيط ، المنوال]

[١٠] إذا كان : التشتت لمجموعة من القيم يساوى صفراً فإن : ....

[الاختلاف يكون صغيراً ، الاختلاف يكون كبيراً ، جميع المفردات تكون متساوية فى القيمة ، الوسط الحسابى لها يساوى صفراً]

[١١] الطريقة الوحيدة المستخدمة لجمع البيانات عن المجتمعات الكبيرة هى ....

[أسلوب الحصر الشامل ، أسلوب العينات ، أسلوب الاختيار المتحيز ، أسلوب الاستبيان]

[١٢] العينة التى لا تمثل المجتمع تمثيلاً جيداً تسمى بالعينة ....

[العشوائية ، الطبقية ، العمدية ، المتحيزة]

[١٣] إذا تم أخذ عينة طبقية قدرها ٥٠ ثلاجة لفحصها من بين ٢٠٠ ثلاجة من النوع (أ) ، ٣٠٠ ثلاجة من النوع (ب) فإن عدد مفردات النوع (ب) في العينة يساوى ....

[١٠ ، ٢٠ ، ٢٥ ، ٣٠]

[١٤] أكثر المجموعات التالية تشتتاً هى المجموعة ....

[{ ٢٨ ، ١٧ ، ٣٠ ، ٣٦ ، ٢٠ } ،
{ ٣١ ، ٣٥ ، ٢٦ ، ٣٧ ، ٤١ } ،
{ ٢٥ ، ٣٩ ، ١٩ ، ٥ ، ٢٧ } ،
{ ٢٠ ، ١٩ ، ٣٩ ، ٣٧ ، ٤٣ }]

الوحدة الرابعة   حساب المثلثات

الدرس الأول : النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

القياس الستينى للزاوية :

نعلم أن :

[١] مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة = ٣٦٠°

و إذا قسمت هذه الزاوية إلى أربعة أرباع متساوية فإن الربع الواحد يحتوى على ٩٠° (زاوية قائمة)

[٢] الدرجة هى وحدة القياس الستينى

كما توجد أجزاء من الدرجة على النحو التالى :

الدرجة = ٦٠ دقيقة (١° = ٦٠′) ،

الدقيقة = ٦٠ ثانية (١′ = ٦٠″)

لاحظ : ٦٢ درجة ، ٢٥ دقيقة ، ٣٠ ثانية   تكتب : ٦٢° ٢٥′ ٣٠″

تحويل الدقائق و الثوانى إلى أجزاء من الدرجة :

يمكن تحويل الدقائق و الثوانى إلى أجزاء من الدرجة بإحدى الطريقتين :

(١) لتحويل ٣٥° ١٢′ ٣٦″ إلى أجزاء من الدرجة نتبع ما يلى :

نحول ١٢′ إلى درجات : ١٢′ = ١٢/٦٠ = ٠,٢°

نحول ٣٦″ إلى دقائق ثم إلى درجات :

٣٦″ = ٣٦/٦٠ = ٠,٦′ ، ٠,٦′ = ٠,٦/٦٠ = ٠,٠١°

∴ ٣٥° ١٢′ ٣٦″ = ٣٥° + ٠,٢° + ٠,٠١° = ٣٥,٢١°

(٢) تستخدم الآلة الحاسبة على النحو التالى :

٣٥	o,,,	١٢	o,,,	٣٦	o,,,	=	o,,,

و الناتج هو : ٣٥,٢١°

تحويل كسور الدرجة إلى دقائق و ثوان :

يمكن تحويل كسور الدرجة إلى دقائق و ثوان باستخدام الآلة الحاسبة : فمثلاً :

لتحويل ٧٨,١٨° لدرجات و دقائق و ثوان تستخدم المفاتيح التالية :

٧٨,١٨°	o,,,	=

فيكون الناتج : ٧٨° ١٠′ ٤٨″

(١) أكتب كلاً من الزوايا التالية بالدرجات باستخدام الآلة الحاسبة :

[١] ٤١° ١٨′ = ...

[٢] ٨٥° ٣٨′ ٨″ = ...

(٢) أكتب كلاً من الزوايا التالية بالدرجات و الدقائق و الثوانى باستخدام الآلة الحاسبة :

[١] ٢٩,٦° = ...

[٢] ٥٧,٢٤٦° = ...

النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة :

الشكل المقابل : يمثل المثلث أ ب حـ القائم الزاوية فى ب

حيث : أ ، حـ زاويتان حادتان متتامتان

يسمى الضلع المقابل للزاوية القائمة ب بالوتر ،

يسمى الضلع المقابل لأى منهما بالمقابل ،

يسمى الضلع المجاور لأى منهما بالمجاور

لاحظ أن :

بالنسبة لزاوية حـ : المقابل هو (أ ب) ، و المجاور هو (ب حـ)

بالنسبة لزاوية أ : المقابل هو (ب حـ) ، و المجاور هو (أ ب)

النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة هى :

	النسبة المثلثية	الرمز	
		بالعربية	بالإنجليزية
١]	جيب الزاوية	حا	sin
٢]	جيب تمام الزاوية	حتا	cos
٣]	ظل الزاوية	طا	tan

ففى الشكل المقابل :

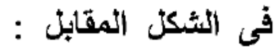
Δ أ ب حـ فيه : ق (∠ ب) = ٩٠° فيكون :

حا حـ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}}$ ، حتا حـ = $\frac{\text{ب حـ}}{\text{أ حـ}}$

، طا حـ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}}$

حا أ = $\frac{\text{ب حـ}}{\text{أ حـ}}$ ، حتا أ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}}$ ، طا أ = $\frac{\text{ب حـ}}{\text{أ ب}}$

فمثلاً :



فى الشكل المقابل :

Δ أ ب حـ فيه : ق (∠ ب) = ٩٠° ، أ ب = ٤ سم ، ب حـ = ٣ سم ، أ حـ = ٥ سم فيكون :

حا حـ = $\frac{٤}{٥}$ ، حتا حـ = $\frac{٣}{٥}$ ، طا حـ = $\frac{٤}{٣}$

، حا أ = $\frac{٣}{٥}$ ، حتا أ = $\frac{٤}{٥}$ ، طا أ = $\frac{٣}{٤}$



تذكر :

نظرية فيثاغورث :

فى Δ أ ب حـ :

إذا كان : ق (∠ ب) = ٩٠°

فإن : $(\text{أ حـ})^2 = (\text{أ ب})^2 + (\text{ب حـ})^2$

، $(\text{أ ب})^2 = (\text{أ حـ})^2 - (\text{ب حـ})^2$

، $(\text{ب حـ})^2 = (\text{أ حـ})^2 - (\text{أ ب})^2$

فمثلاً :

١) إذا كان : أ ب = ٤ سم ، ب حـ = ٣ سم فإن :

$(\text{أ حـ})^2$ = ١٦ + ٩ = ٢٥ ∴ أ حـ = ٥ سم

٢) إذا كان : أ حـ = ١٣ سم ، أ ب = ١٢ سم فإن :

$(\text{ب حـ})^2$ = ١٦٩ − ١٤٤ = ٢٥ ∴ ب حـ = ٥ سم

(٣) ∆ أ ب حـ فيه : ق (∠ ب) = ٩٠° ،

أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم



[١] أوجد : طول $\overline{\text{أ حـ}}$

[٢] أوجد : طا أ ، طا حـ

[٣] أثبت أن : حا أ حتا حـ + حتا أ حا حـ = ١

[٤] أوجد : حتا^2 أ + حا^2 أ



(٤) ∆ س ص ع فيه : ق (∠ ص) = ٩٠° ،

س ع = ٢٥ سم ، س ص = ٢٤ سم

ع
ص
س
أحمد الشتوى

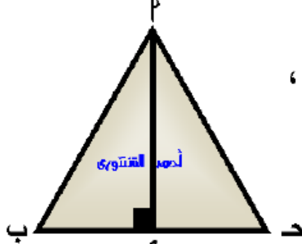
[١] أوجد : طول $\overline{\text{ع ص}}$

[٢] أوجد : حا ع ، حتا س

[٣] أوجد : حتا ع حتا س – حا ع حا س

[٤] أوجد : ١ – طا^2 ع

(٥) فى الشكل المقابل :



Δ أ ب حـ فيه : أ ب = أ حـ = ١٠ سم ،

ب حـ = ١٢ سم ، $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$

[١] أثبت أن : حا ب + حا حـ > ١

[٢] أثبت أن : حتا² حـ + حا² حـ = ١



(٦) فى الشكل المقابل :

Δ أ ب حـ فيه : أ ب = ١٣ سم ،

أ حـ = ١٥ سم ، ء حـ = ٩ سم ،

$\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$

أوجد فى أبسط صورة قيمة المقدار :

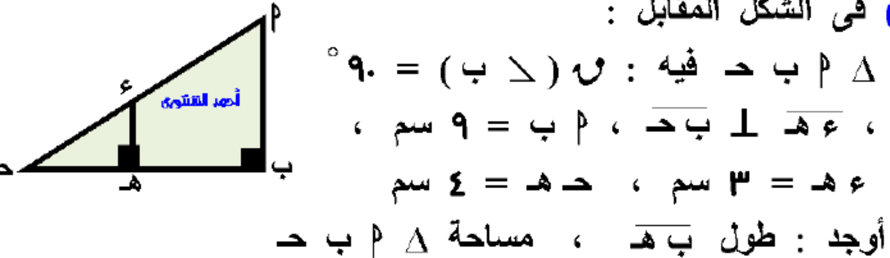
$$\frac{\text{طا (∠ حـ أ ء) + طا (∠ ب أ ء)}}{\text{طا (∠ حـ أ ء) − طا (∠ ب أ ء)}}$$

(٧) ٩ ب حـ ء شبه منحرف متساوى الساقين فيه : $\overline{٩ ء}$ // $\overline{ب حـ}$ ،
٩ ب = ء حـ = ٥ سم ، ٩ ء = ٤ سم ، ب حـ = ١٢ سم

أثبت أن : $\frac{٥ \text{ طا ب حتا حـ}}{\text{حا}^٢ \text{ حـ} + \text{حتا}^٢ \text{ ب}} = ٣$



(٨) فى الشكل المقابل :



Δ ٩ ب حـ فيه : ق (∠ ب) = ٩٠°
، $\overline{ء هـ}$ ⊥ $\overline{ب حـ}$ ، ٩ ب = ٩ سم ،
ء هـ = ٣ سم ، حـ هـ = ٤ سم

أوجد : طول $\overline{ب هـ}$ ، مساحة Δ ٩ ب حـ

(٩) فى أى Δ ﻫ ب حـ قائم الزاوية فى ب أثبت أن :

حا^2 ﻫ + حا^2 حـ = ١

(١٠) Δ ﻫ ب حـ قائم الزاوية فى ب ، فإذا كان : ٢ ﻫ ب = $\sqrt{3}$ ﻫ حـ

أوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية حـ

(١١) Δ ﻫ ب حـ قائم الزاوية فى ب ، فإذا كان : حا ﻫ = $\frac{15}{17}$

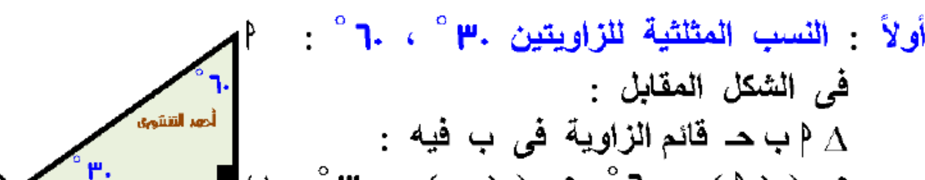
أوجد قيمة : ٢ حا ﻫ حتا ﻫ

(١٢) Δ ﻫ ب حـ قائم الزاوية فى ب ، فإذا كان : ٤ طا ﻫ − ٣ = ٠

أثبت أن : حتا^2 ﻫ − حا^2 ﻫ = ٢ حتا^2 ﻫ − ١

الدرس الثانى : النسب المثلثية الأساسية لبعض الزاويا

أولاً : النسب المثلثية للزاويتين ٣٠° ، ٦٠° :



فى الشكل المقابل :

Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب فيه :

ق (∠ أ) = ٦٠° ، ق (∠ حـ) = ٣٠°

لذلك يسمى Δ أ ب حـ (مثلث ثلاثينى ستينى)

، ∵ طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° فى المثلث القائم الزاوية يساوى نصف طول الوتر ∴ أ ب = $\frac{١}{٢}$ أ حـ

أى أن : أ حـ = ٢ أ ب

و بفرض أن : أ ب = ل وحدة طول

فإن : أ حـ = ٢ ل وحدة طول

∴ (ب حـ)^٢ = (أ حـ)^٢ − (أ ب)^٢ = ٤ ل^٢ − ل^٢ = ٣ ل^٢

∴ ب حـ = $\sqrt{٣}$ ل وحدة طول

لأى أن : أ ب : ب حـ : أ حـ = ١ : $\sqrt{٣}$: ٢

و بالتالى يمكن استنتاج النسب المثلثية للزاويتين ٣٠° ، ٦٠° كالتالى :

حا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ ، حتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ظا ٣٠° = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

حا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، حتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$ ، ظا ٦٠° = $\sqrt{٣}$

أحمد الشتتوى

ثانياً : النسب المثلثية للزاوية ٤٥° :

فى الشكل المقابل :

Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب فيه :

أ ب = ب حـ

∴ ق (∠ ب) = ق (∠ حـ) = ٤٥°

و بفرض أن : أ ب = ب حـ = ل وحدة طول

∴ (أ حـ)^٢ = (أ ب)^٢ + (ب حـ)^٢ = ل^٢ + ل^٢ = ٢ ل^٢

∴ أ حـ = $\sqrt{٢}$ ل وحدة طول

و بالتالى يمكن استنتاج النسب المثلثية للزاوية ٤٥° كالتالى :

حا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، حتا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ظا ٤٥° = ١

و يمكن وضع النسب المثلثية السابقة فى جدول كالتالى :

قياس الزاوية / النسبة	٣٠°	٦٠°	٤٥°
حا	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$
حتا	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$
ظا	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	$\sqrt{٣}$	١

لاحظ : $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

ملاحظات :

[١] مما سبق نجد أن :

جيب أى زاوية يساوى جيب تمام الزاوية المتممة لهذه الزاوية
و العكس صحيح

فمثلاً : حا ٣٠° = حتا ٦٠° ، حتا ٣٠° = حا ٦٠°

، حا ٤٥° = حتا ٤٥°

و بالتالى :

إذا كان : ق (∠ ٲ) + ق (∠ ب) = ٩٠°

فإن : حا ٲ = حتا ب ، حتا ٲ = حا ب ، و العكس صحيح

فإذا كان : ∠ ٲ ، ب حادتين ، كان : حا ٲ = حتا ب أو
حتا ٲ = حا ب فإن : ق (∠ ٲ) + ق (∠ ب) = ٩٠°

[٢] لأى زاوية ٲ يكون : طا ٲ = $\frac{\text{حا ٲ}}{\text{حتا ٲ}}$

فمثلاً :

١) حتا ٦٠° حا ٣٠° + طا ٤٥° + حا^{٢} ٣٠° =

$\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} + ١ + (\frac{١}{٢})^{٢} = \frac{١}{٤} + ١ + \frac{١}{٤} = ٢$

٢) لإيجاد قيمة س حيث س قياس زاوية حادة ،

٢ حا س = طا^{٢} ٦٠° − ٢ طا ٤٥° فإن :

٢ حا س = $(\sqrt{٣})^{٢}$ − ٢ × ١ = ٣ − ٢ = ١

∴ حا س = $\frac{١}{٢}$ ∴ س = ٣٠°

(ا) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كل مما يلى :

[١] طا ٤٥° × حا ٣٠°

[٢] حا^{٢} ٤٥° + حتا^{٢} ٤٥°

[٣] حا ٣٠° حتا ٦٠° + حا^{٢} ٦٠°

[٤] حا ٤٥° حتا ٤٥° + حا ٣٠° حتا ٦٠° − حتا^{٢} ٣٠°

[٥] (حتا ٣٠° + حتا ٦٠°) (حتا ٣٠° − حتا ٦٠°)

(٢) بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت كلاً مما يلى :

[أ] حا ٦٠° = ٢ حا ٣٠° حتا ٣٠°

[ب] حتا ٦٠° = ٢ حتا^{٢} ٣٠° − ١

[ج] حتا ٦٠° = حتا^{٢} ٣٠° − حا^{٢} ٣٠°

[د] ٢ حتا^{٢} ٤٥° − ١ = ١ − ٢ حا^{٢} ٤٥°

[هـ] $\frac{\text{حا ٣٠° حتا ٤٥° + حتا ٣٠° حا ٤٥°}}{\text{حا ٦٠° حتا ٤٥° + حتا ٦٠° حا ٤٥°}}$ = طا^{٢} ٤٥°



(٣) أوجد قيمة س حيث س قياس زاوية حادة فى كل مما يلى :

[أ] حا س = ٢ حا ٣٠° حتا ٣٠°

[ب] طا س = ٤ حا ٣٠° حتا ٦٠° طا^{٢} ٤٥°

[ج] حا س = حا ٦٠° حتا ٣٠° − حتا ٦٠° حا ٣٠°

[د] ٢ حا س = حا ٦٠° حتا ٣٠° + حتا ٦٠° حا ٣٠°

[هـ] حا ٣٠° − طا س = طا ٦٠° حتا ٣٠° − ٤ حتا ٤٥° حا ٤٥°

(٤) أوجد قيمة س فى كل مما يلى :

[١] ٤ س = حتا^2 ٣٠° طا^2 ٣٠° طا^2 ٤٥°

[٢] س حا ٣٠° = حا ٦٠° حتا ٣٠° + حتا ٦٠° حا ٣٠°

[٣] س حا ٣٠° حتا^2 ٤٥° = حتا^2 ٣٠° طا^2 ٤٥°

[٤] س حا ٤٥° حتا ٤٥° طا ٦٠° = طا^2 ٤٥° − حتا^2 ٦٠°

(٥) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] إذا كانت النسبة بين قياسى زاويتين متتامتين كنسبة ٣ : ٥
فإن القياس الستينى للزاوية الصغرى = ...

[٣٣° ٤٥َ ، ٤٥° ٣٣َ ، ٥٦° ١٥َ ، ١٥° ٥٦َ]

[٢] إذا كانت النسبة بين قياسى زاويتين متكاملتين كنسبة ٣ : ٥
فإن القياس الستينى للزاوية الكبرى = ...

[٦٧° ٣٠َ ، ١١٢° ٣٠َ ، ٧٦° ٣٠َ ، ١٠٢° ٣٠َ]

[٣] إذا كان : حتا ٢ س = $\frac{١}{٢}$ حيث س قياس زاوية حادة
فإن : ق (∠ س) = ... °

[١٥ ، ٣٠ ، ٤٥ ، ٦٠]

[٤] إذا كان : حتا س = حا ٣٠° حيث س قياس زاوية حادة
فإن : ق (∠ س) = ... °

[١٥ ، ٣٠ ، ٤٥ ، ٦٠]

[٥] إذا كان : طا $\frac{٣}{٢}$ س = ١ حيث س قياس زاوية حادة
فإن : ق (∠ س) = ... °

[١٥ ، ٣٠ ، ٤٥ ، ٦٠]

[٦] إذا كان : طا ٣ س = $\sqrt{٣}$ حيث ٣ س زاوية حادة
فإن : ق (∠ س) = ... °

[٦٠ ، ٤٠ ، ٢٠ ، ١٠]

[٧] إذا كان : حتا (س + ١٠°) = $\frac{١}{٢}$ حيث (س + ١٠°) زاوية حادة فإن : ق (∠ س) = ... °
[٢٠ ، ٣٠ ، ٤٠ ، ٥٠]

[٨] ٤ حتا ٣٠° طا ٦٠° = ...
[٣ ، ٢√٣ ، ٦ ، ١٢]

[٩] حا² ٦٠° − حتا² ٦٠° = ...
[صفر ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، ١]

[١٠] ٢ حتا ٣٠° حتا ٣٠° = ...
[حا ٦٠° ، حتا ٦٠° ، طا ٦٠° ، ٢ حا ٦٠°]

[١١] طا ٤٥° حا ٣٠° = ...
[$\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، ١]

[١٢] حا ٦٠° + حتا ٣٠° + طا ٦٠° = ...
[−√٣ ، √٣ ، ٢√٣ ، ٣√٣]

[١٣] فى Δ ا ب ح قائم الزاوية فى ب يكون : حا ا + حتا ح = ...
[٢ حا ح ، ٢ حا ب ، ٢ حتا ا ، ٢ حا ا]

[١٤] إذا كان : Δ ا ب ح قائم الزاوية فى ب ، ا ب = ٣ سم ، ب ح = ٤ سم فإن : حا ا حتا ح = ...
[١ ، $\frac{٩}{٢٥}$ ، $\frac{١٢}{٢٥}$ ، $\frac{١٦}{٢٥}$]

[١٥] إذا كان : Δ س ص ع قائم الزاوية فى ع ، س ص = ٢٥ سم ، ص ع = ٧ سم فإن : حا س + حتا ص = ...
[$\frac{٣١}{٢٥}$ ، $\frac{١٧}{٢٥}$ ، ٢ ، ١]

[١٦] إذا كان : Δ س ص ع قائم الزاوية فى ص ، س ص = ٥ سم ، س ع = ١٣ سم فإن : ٢ حا س طا س − حا ع = ...
[$\frac{٧}{١٣}$ ، $\frac{١٩}{١٣}$ ، ٢ ، ١]

[١٧] إذا كان : Δ ا ب ح قائم الزاوية فى ا ، ا ب = ٢٠ سم ، ا ح = ١٥ سم فإن : حتا ح حتا ب − حا ح حا ب = ...
[صفر ، ١ ، $\frac{٢٤}{٢٥}$ ، $\frac{٢٥}{٢٤}$]

[١٨] إذا كان : Δ ا ب ح قائم الزاوية فى ب ، ا ب = ٨ سم ، ب ح = ١٥ سم فإن : ٢ حتا ا − حا ح طا ا = ...
[صفر ، ١ ، ١٧ ، $\frac{١}{١٧}$]

[١٩] فى Δ ا ب ح قائم الزاوية فى ب يكون : حا ا + حتا ا ١
[$<$ ، $=$ ، $>$ ، $\geqslant$]

إيجاد النسب المثلثية لزاوية معلومة :

[١] لإيجاد : حا ٥٢°
تستخدم الآلة الحاسبة كما يلي :

sin	٥٢	=

فيكون : حا ٥٢° = ٠,٧٨٨٠ مقرباًلأربعة أرقام عشرية

[٢] لإيجاد : حتا ٣٠َ ٦٧°
تستخدم الآلة الحاسبة كما يلي :

cos	٦٧	o,,,	٣٠	o,,,	=

فيكون : حتا ٣٠َ ٦٧° = ٠,٣٨٢٧ مقرباًلأربعة أرقام عشرية

[٣] لإيجاد : طا ٢٥َ ٤٦َ ٥٠° تستخدم الآلة الحاسبة كما يلي :

tan	٥٠	o,,,	٤٦	o,,,	٢٥	o,,,	=

فيكون : طا ٢٥َ ٤٦َ ٥٠° = ١,٢٢٥٠ مقرباًلأربعة أرقام عشرية

إيجاد قياس الزاوية إذا علمت إحدى النسب المثلثية لها :

[١] إذا كان : حا س = ٠,٦٤٢٧٨٧٦ تستخدم الآلة الحاسبة كما يلي :

shift	sin	٠,٦٤٢٧٨٧٦	=	o,,,

فيكون : س = ٤٠°

[٢] إذا كان : حتا س = ٠,٦٨٤٦ تستخدم الآلة الحاسبة كما يلي :

shift	cos	٠,٦٨٤٦	=	o,,,

فيكون : س = ٤٥َ ٤٧َ ٤٦°

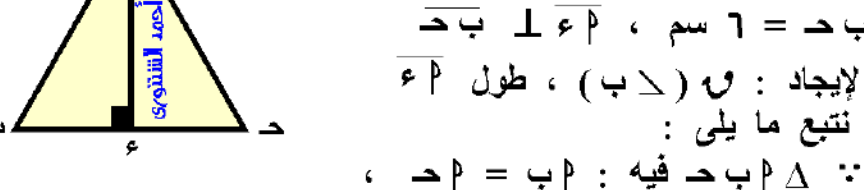
[٣] إذا كان : طا س = ١,٥١٥٦ تستخدم الآلة الحاسبة كما يلي :

shift	tan	١,٥١٥٦	=	o,,,

فيكون : س = ٥٩َ ٣٤َ ٥٦°

فمثلاً :

في الشكل المقابل :



Δ أ ب جـ فيه : أ ب = أ جـ = ٥ سم ، ب جـ = ٦ سم ، أ ء ⊥ ب جـ

لإيجاد : ق (∠ ب) ، طول أ ء

نتبع ما يلي :

∵ Δ أ ب جـ فيه : أ ب = أ جـ ، أ ء ⊥ ب جـ ∴ ب ء = جـ ء = ½ ب جـ = ٣ سم

من Δ أ ب ء يكون : حتا ب = ٣/٥ = ٠,٦

∴ ق (∠ ب) = ٤٩َ ٧َ ٥٣° ، أ ء / ٥ = حا ب

∴ أ ء = ٥ × حا ٤٩َ ٧َ ٥٣° = ٤ سم

و بطريقة أخرى :

أ ء / ٣ = طا ب ∴ أ ء = ٣ × طا ٤٩َ ٧َ ٥٣° = ٤ سم

و بطريقة ثالثة :

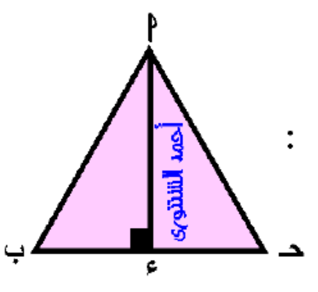
(أ ء)² = (أ جـ)² − (ب ء)² = ٢٥ − ٩ = ١٦

∴ أ ء = ٤ سم

(٦) فى الشكل المقابل :

Δ أ ب حـ فيه : أ ب = أ حـ = ٨ سم ، ب حـ = ١٢ سم ، أ ء ⊥ ب حـ أوجد :

ق (∠ ب) ، مساحة Δ أ ب حـ

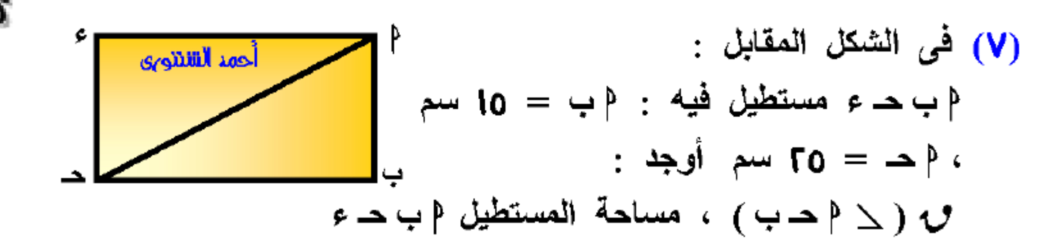


(٧) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ١٥ سم

، أ حـ = ٢٥ سم أوجد :

ق (∠ أ حـ ب) ، مساحة المستطيل أ ب حـ ء



(٨) فى الشكل المقابل :

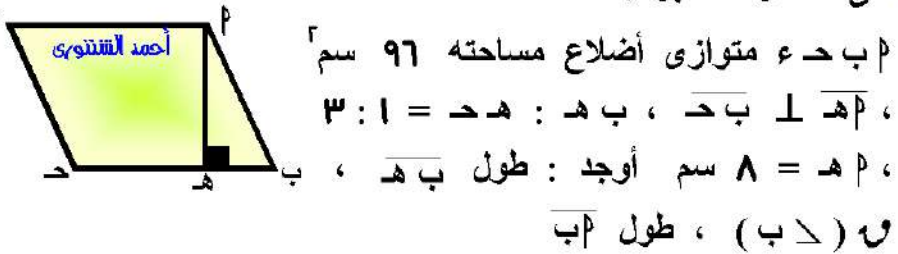
أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ حـ = ٢٤ سم

، ق (∠ أ حـ ب) = ٢٥° أوجد :

طول ب حـ

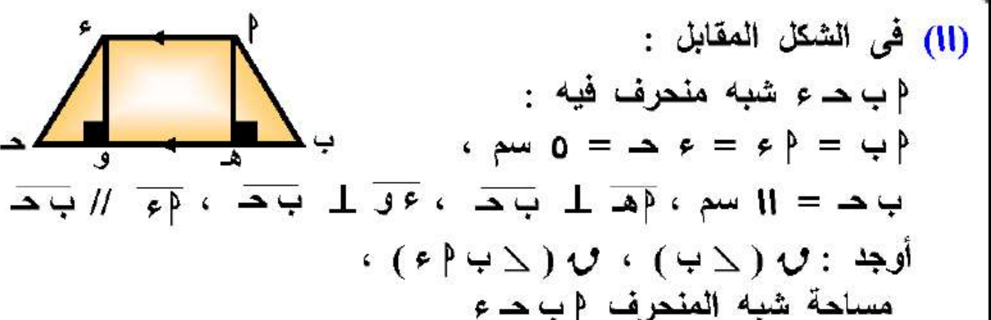
(٩) سلم أ ب طوله ٦ أمتار يستند طرفه أ على حائط رأسى و طرفه ب على أرض أفقية ، فإذا كانت حـ هى مسقط أ على سطح الأرض ، و كان قياس زاوية ميل السلم على سطح الأرض ٦٠° أوجد طول أ حـ

(١٠) فى الشكل المقابل :



ا ب حـ ء متوازى أضلاع مساحته ٩٦ سم^2
، $\overline{\text{اهـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$ ، ب هـ : هـ حـ = ١ : ٣
، ا هـ = ٨ سم أوجد : طول $\overline{\text{ب هـ}}$ ،
ق (∠ ب) ، طول $\overline{\text{اب}}$

(١١) فى الشكل المقابل :



ا ب حـ ء شبه منحرف فيه :
ا ب = ا ء = ء حـ = ٥ سم ،
ب حـ = ١١ سم ، $\overline{\text{اهـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{ءو}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{اء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$
أوجد : ق (∠ ب) ، ق (∠ ب ا ء) ،
مساحة شبه المنحرف ا ب حـ ء

الوحدة الخامسة　　　الهندسة التحليلية

الدرس الأول : البعد بين نقطتين

تمهيد : نعلم أن :
المسافة بين نقطتين على خط مستقيم (أفقى أو رأسى) =
| عدد نقطة النهاية – عدد نقطة البداية |

و بالتالى :
المسافة بين نقطتين على محور السينات (أو أى مستقيم يوازيه)
= | الإحداثى السينى نقطة النهاية – الإحداثى السينى نقطة البداية |
المسافة بين نقطتين على محور الصادات (أو أى مستقيم يوازيه)
= | الإحداثى الصادى نقطة النهاية – الإحداثى الصادى نقطة البداية |

فمثلاً :
من الشكل المقابل :
ب حـ = | (– ١) – ٣ | = | – ٤ |
∴ ب حـ = ٤ وحدة طول
أ ب = | (– ١) – ٢ | = | – ٣ |
∴ أ ب = ٣ وحدة طول

لاحظ :
$\triangle$ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب
∴ $(\text{أ حـ})^2$ = ١٦ + ٩ = ٢٥
∴ أ حـ = ٥ وحدة طول

و بصفة عامة :
إذا كانت : م ($س_1$ ، $ص_1$) ، ن ($س_2$ ، $ص_2$) نقطتين فى المستوى فإن :
ل م = | و ب – و أ |
= | $س_2 - س_1$ |
، ل ن = | ن ب – ل ب |
= | $ص_2 - ص_1$ |
، ∵ $\triangle$ م ن ل قائم الزاوية فى ل
∴ $(\text{م ن})^2 = (\text{ل م})^2 + (\text{ل ن})^2$　　(نظرية فيثاغورث)
= $(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2$
∴ م ن = $\sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$

البعد بين النقطتين ($س_1$ ، $ص_1$) ، ($س_2$ ، $ص_2$) = $\sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$

البعد بين النقطتين = $\sqrt{\text{مربع فرق السينات + مربع فرق الصادات}}$

فمثلاً :

١) البعد بين النقطتين أ (١ ، ٧) ، ب (– ٤ ، – ٥) هو :

أ ب = $\sqrt{((-٤)-١)^٢ + ((-٥)-٧)^٢}$

= $\sqrt{(-٥)^٢ + (-١٢)^٢}$ = $\sqrt{١٦٩}$ = ١٣ وحدة طول

٢) إذا كان البعد بين النقطتين أ (١ ، ٧) ، ب (ك ، – ٥) يساوى ١٣ وحدة طول ، لإيجاد قيمة ك نتبع ما يلى :

∵ أ ب = ١٣ ∴ $(أ ب)^٢$ = ١٦٩

∴ $(ك - ١)^٢ + ((-٥) - ٧)^٢$ = ١٦٩

∴ $(ك - ١)^٢$ + ١٤٤ = ١٦٩

∴ $(ك - ١)^٢$ = ٢٥ ، بأخذ الجذر التربيعى لطرفين ينتج :

ك – ١ = ٥ و منها : ك = ٦

أو : ك – ١ = – ٥ و منها : ك = – ٤

ملاحظات :

١] فى الشكل المقابل :

إذا كان : م (س ، ص) ،

و (٠ ، ٠) نقطة الأصل فإن :

و م = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$

٢] لإثبات أن أى ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة نوجد البعد بين كل نقطتين ثم أن أكبر بعد يساوى مجموع البعدين الآخرين

٣] لإثبات أن : النقط أ ، ب ، حـ هى رؤوس مثلث نوجد : أ ب ، ب حـ ، أ حـ ثم نثبت أن : مجموع أصغر بعدين أكبر من البعد الثالث

٤] لإثبات أن : Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب نثبت أن :

$(أ ب)^٢ + (ب حـ)^٢ = (أ حـ)^٢$

٥] لإثبات أن : Δ أ ب حـ منفرج الزاوية فى ب نثبت أن :

$(أ ب)^٢ + (ب حـ)^٢ < (أ حـ)^٢$

٦] لإثبات أن : Δ أ ب حـ حاد الزوايا نثبت أن :

$(أ ب)^٢ + (ب حـ)^٢ > (أ حـ)^٢$

٧] لإثبات أن الشكل الرباعى أ ب حـ ء متوازى أضلاع :

نثبت أن : أ ب = حـ ء ، ب حـ = أ ء

٨] لإثبات أن الشكل الرباعى أ ب حـ ء مستطيل :

نثبت أن : أ ب = حـ ء ، ب حـ = أ ء ، أ حـ = ب ء

٩] لإثبات أن الشكل الرباعى أ ب حـ ء مربع :

نثبت أن : أ ب = حـ ء = ب حـ = أ ء ، أ حـ = ب ء

١٠] لإثبات أن الشكل الرباعى أ ب حـ ء معين :

نثبت أن : أ ب = حـ ء = ب حـ = أ ء ، أ حـ ≠ ب ء

١١] لإثبات أن : النقط أ ، ب ، حـ ، ء تقع على دائرة مركزها م :

نثبت أن : م أ = م ب = م حـ = م ء

فمثلاً :

لإثبات أن : الشكل الرباعى ؏ ب حـ ء حيث ؏ (٠ ، ١) ، ب (٤ ، ٥) ، حـ (١ ، ٨) ، ء (– ٣ ، ٤) مستطيل و إيجاد مساحته نتبع التالى :

؏ ب = √(١٦ + ١٦)

= ٤ √٢ وحدة طول ،

ب حـ = √(٩ + ٩)

= ٣ √٢ وحدة طول ،

حـ ء = √(١٦ + ١٦)

= ٤ √٢ وحدة طول ،

؏ ء = √(٩ + ٩)

= ٣ √٢ وحدة طول ،

؏ حـ = √(١ + ٤٩) = ٥ √٢ وحدة طول ،

ب ء = √(١ + ٤٩) = ٥ √٢ وحدة طول

، ∵ ؏ ب = حـ ء ، ب حـ = ؏ ء ، ؏ حـ = ب ء

∴ الشكل الرباعى ؏ ب حـ ء مستطيل

، مساحة المستطيل ؏ ب حـ ء = ؏ ب × ب حـ

= ٤ √٢ × ٣ √٢

= ٢٤ وحدة مساحة

(١) أثبت أن النقط : ؏ (٤ ، ٣) ، ب (١ ، ١) ، حـ (– ٥ ، – ٣) تقع على استقامة واحدة

(٢) إذا كان : ؏ (١ ، – ١) ، ب (٢ ، ١) ، حـ (– ٣ ، – ٢)

بين نوع Δ ؏ ب حـ بالنسبة لزواياه

(٣) إذا كان : ؟ (−١ ، −١) ، ب (٢ ، ٣) ، حـ (٦ ، ٠)
أثبت أن : Δ ؟ ب حـ قائم الزاوية فى ب ثم أوجد مساحته

(٤) إذا كان : ؟ (−٢ ، ٤) ، ب (٣ ، −١) ، حـ (٤ ، ٥)
أثبت أن : Δ ؟ ب حـ متساوى الساقين

(٥) إذا كان : ؟ (١ ، ٠) ، ب (−١ ، ٤) ، حـ (٧ ، ٨) ، ء (٩ ، ٤)
أثبت أن الشكل ؟ ب حـ ء مستطيل و أوجد مساحته

(٦) إذا كان : ؟ (−١ ، ١) ، ب (٠ ، ٥) ، حـ (٥ ، ٦) ، ء (٤ ، ٢)
أثبت أن الشكل ؟ ب حـ ء متوازى أضلاع

(٧) إذا كان : ٲ (٢ ، ٤) ، ب (– ٣ ، ٠) ، حـ (– ٧ ، ٥) ، ء (– ٢ ، ٩)
أثبت أن الشكل ٲ ب حـ ء مربع ثم أوجد مساحته

(٨) إذا كان : ٲ (٥ ، ٣) ، ب (٦ ، – ٢) ، حـ (١ ، – ١) ، ء (٠ ، ٤)
أثبت أن الشكل ٲ ب حـ ء معين ثم أوجد مساحته

(٩) أثبت أن النقط : ٲ (٣ ، – ١) ، ب (– ٤ ، ٦) ، حـ (٢ ، – ٢) تقع على دائرة واحدة مركزها م (– ١ ، ٢) ثم محيط الدائرة حيث :
π = ٣,١٤

(١٠) إذا كان : ٲ (س ، ٣) ، ب (٣ ، ٢) ، حـ (٥ ، ١) ، و كان ٲ ب = ب حـ أوجد قيمة س

(١١) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] البعد بين النقطتين (٠ ، ٠) ، (٥ ، ١٢) يساوى ....

[١٣ ، ١٢ ، ٧ ، ٥]

[٢] البعد بين النقطتين (٢ ، ٢) ، (–١ ، ٦) يساوى ....

[٢٥ ، ١٠ ، ٥ ، ٢]

[٣] بعد النقطة (٤ ، –٣) عن محور السينات يساوى ....

[٥ ، ٤ ، ٣ ، –٣]

[٤] بعد النقطة (٤ ، –٣) عن محور الصادات يساوى ....

[٥ ، ٤ ، ٣ ، –٤]

[٥] إذا كانت دائرة مركزها نقطة الأصل و نصف قطرها ٢ وحدة طول فإن : النقطة التى تنتمى لدائرة هى ....

[(١ ، $\sqrt{٢}$) ، (١ ، $\sqrt{٣}$) ، (–٢ ، ١) ، (١ ، ٢)]

[٦] النقط (٠ ، ٠) ، (٣ ، ٠) ، (٠ ، ٤) تكون ....

[رؤوس مثلث منفرج الزاوية ، رؤوس مثلث حاد الزوايا ، رؤوس مثلث قائم الزاوية ، على استقامة واحدة]

[٧] النقط (–٣ ، ٠) ، (٣ ، ٠) ، (٠ ، ٣) هى رؤوس مثلث ....

[قائم الزاوية و متساوى الساقين ، مختلف الأضلاع ، متساوى الأضلاع ، منفرج الزاوية]

[٨] إذا كان : البعد بين النقطتين (أ ، ٠) ، (٠ ، ١) هو وحدة طول فإن : أ = ...

[صفر ، ±١ ، ١ ، –١]

[٩] فى مستوى إحداثى متعامد النقطة التى تبعد عن نقطة الأصل مسافة ٢ وحدة طول يمكن أن تكون ....

[(–٣ ، ٥) ، (٠ ، ٢) ، (٢ ، ١) ، (١ ، ٢)]

[١٠] إذا كان البعد بين النقطتين (٠ ، ك) ، (٤ ، ٠) يساوى ٥ وحدة طول فإن : ك يمكن أن تكون .....

[٤ ، ±٣ ، ٣ ، –٣]

[١١] إذا كان البعد بين النقطتين (٢ ، ك) ، (٣ ، –١) يساوى $\sqrt{١٧}$ وحدة طول فإن : ك يمكن أن تكون .....

[–١ ، ٢ ، ٣ ، ١٧]

الدرس الثانى : إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة

تمهيد :

بملاحظ الشكل المقابل نجد أن :

أ (١ ، ٢) ، ب (٥ ، ٢) ، حـ (٥ ، ٤)

كما نلاحظ :

١] $\overline{أب}$ // محور السينات

، م (٣ ، ٢) نقطة منتصفها

حيث : $3 = \frac{1 + 5}{2}$

، $2 = \frac{2 + 2}{2}$

٢] $\overline{ب حـ}$ // محور الصادات ، ن (٥ ، ٣) نقطة منتصفها

حيث : (٥ ، ٣) = $\left(\frac{5 + 5}{2} ، \frac{2 + 4}{2} \right)$

٣] ك (٣ ، ٣) نقطة منتصف $\overline{أحـ}$

حيث : (٣ ، ٣) = $\left(\frac{1 + 5}{2} ، \frac{2 + 4}{2} \right)$

استنتاج قانون إحداثى منتصف قطعة مستقيمة :

إذا كانت : أ ($س_1$ ، $ص_1$) ،

ب ($س_2$ ، $ص_2$) ، م (س ، ص)

حيث م منتصف $\overline{أب}$

و من تطابق ΔΔ م ء أ ، ب هـ م

بالشكل المقابل نجد أن :

أ ء = م هـ　　∴ $س - س_1 = س_2 - س$

∴ ٢ س = $س_1 + س_2$　　∴ س = $\frac{س_1 + س_2}{2}$

، بالمثل : م ء = ب هـ　　∴ $ص - ص_1 = ص_2 - ص$

∴ ٢ ص = $ص_1 + ص_2$　　∴ ص = $\frac{ص_1 + ص_2}{2}$

∴ م $\left(\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2} \right)$

فمثلاً :

١) إذا كانت حـ منتصف $\overline{أب}$ و كان أ (١ ، ٤) ، ب (−٥ ، −٢)

فإن : حـ هى $\left(\frac{1 - 5}{2} ، \frac{4 - 2}{2} \right)$ = (−٢ ، ١)

٢) إذا كانت حـ (٣ ، −١) هى منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (٢ ، −٣)

لإيجاد إحداثيى نقطة ب

نفرض أن : ب (س ، ص)

∴ $3 = \frac{2 + س}{2}$　　∴ ٢ + س = ٦　　و منها : س = ٤

، $-1 = \frac{-3 + ص}{2}$　　∴ −٣ + ص = −٢　　و منها : ص = ١

∴ ب (٤ ، ١)

ملاحظات :

[١] إذا كانت : م نقطة تقاطع قطرى متوازى أضلاع ﺃ ب ﺣ ﺀ
فإن : م منتصف كلاً من القطرين $\overline{ﺃﺣ}$ ، $\overline{ﺏﺀ}$

[٢] لإثبات أن الشكل ﺃ ب ﺣ ﺀ متوازى أضلاع نثبت أن :
م نقطة تقاطع قطريه منتصف كلاً من $\overline{ﺃﺣ}$ ، $\overline{ﺏﺀ}$

[٣] إذا كان : $\overline{ﺃﺀ}$ متوسط فى Δ ﺃ ب ﺣ فإن : ﺀ منتصف $\overline{ﺏﺣ}$

[٤] إذا كان : $\overline{ﺃﺏ}$ قطر فى الدائرة م فإن : م منتصف $\overline{ﺃﺏ}$

[٥] إذا قسمت $\overline{ﺃﺏ}$ بالنقط : ﺀ ، ﻫ ، و (أربعة أجزاء متساوية فى الطول) يمكن اعتبار أن : ﺀ منتصف $\overline{ﺃﺏ}$ ، ﻫ منتصف $\overline{ﺃﺀ}$ ، و منتصف $\overline{ﺏﻫ}$

(١) أوجد إحداثيى نقطة منتصف $\overline{ﺃﺏ}$ فى كل مما يلى :

[١] ﺃ (٢ ، ٤) ، ب (٦ ، ٠)

[٢] ﺃ (٧ ، –٦) ، ب (–١ ، ٠)

(٢) إذا كانت ﺣ منتصف $\overline{ﺃﺏ}$ أوجد س ، ص فى كل مما يلى :

[١] ﺃ (س ، ٣) ، ب (٦ ، ص) ، ﺣ (٤ ، ٦)

[٢] ﺃ (٥ ، –٣) ، ب (س ، ص) ، ﺣ (٦ ، –٤)

[٣] ﺃ (س ، –٦) ، ب (٩ ، –١١) ، ﺣ (–٣ ، ص)

(٣) إذا كانت ٢ (١ ، – ٦) ، ب (٩ ، ٢) أوجد إحداثيات النقط التى تقسم $\overline{\text{٢ب}}$ إلى أربعة أجزاء متساوية فى الطول

(٤) إذا كان : ٢ ب حـ ء متوازى أضلاع حيث ٢ (– ٣ ، ٤) ، ب (٥ ، – ٢) ، حـ (١ ، – ٣) أوجد إحداثيى ء

(٥) إذا كان : ٢ ب حـ ء معين حيث ٢ (٣ ، ٢) ، ب (٤ ، – ٢) ، حـ (– ١ ، – ٢) ، ء (– ٢ ، ٣) أوجد إحداثيى نقطة تقاطع قطريه ، ثم أوجد مساحته

(٦) أثبت أن النقط ٢ (٦ ، ٠) ، ب (٢ ، – ٤) ، حـ (– ٤ ، ٢) هى رؤوس مثلث قائم الزاوية ثم أوجد إحداثيى نقطة ء التى تجعل الشكل ٢ ب حـ ء مستطيلاً

(٧) أثبت أن النقط ٩ (-١ ، ٤) ، ب (٣ ، ١) ، حـ (-٥ ، ١)
هى رؤوس مثلث متساوى الساقين ثم أوجد مساحته

(٨) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] إذا كان : ٩ب قطر فى دائرة حيث ٩ (٣ ، -٥) ،
ب (٥ ، ١) فإن : مركز الدائرة هو ....
[(٨ ، -٢) ، (٤ ، -٢) ، (٤ ، ٢) ، (٢ ، ٢)]

[٢] إذا كانت النقطة (٠ ، ٤) تنصف البعد بين النقطتين (-١ ، -١)
، (س ، ص) فإن : النقطة (س ، ص) هى ....
[($-\frac{1}{2}$ ، $\frac{3}{2}$) ، (-١ ، ٣) ، (-١ ، ٩) ، (١ ، ٩)]

[٣] إذا كانت النقطة (٣ ، -١) هى منتصف القطعة المستقيمة التى
طرفاها (س ، ٢) ، (١٠ ، ص) فإن : س + ص = ...
[٨ ، ٢ ، -٨ ، -٢]

[٤] إذا كانت : م (١ ، ٢) هى نقطة تقاطع قطرى متوازى الأضلاع
٩ ب حـ ء حيث ٩ (٢ ، ٥) فإن : إحداثيى حـ هى ....
[(٠ ، -١) ، (-١ ، ٠) ، (٠ ، ٢) ، (٢ ، ٠)]

[٥] إذا كان : ٩ء متوسط فى Δ ٩ ب حـ ، م منتصف ٩ء حيث
٩ (٠ ، ٨) ، ب (٣ ، ٢) ، حـ (-٣ ، ٦) فإن : إحداثيى م
هى ....
[(٠ ، ٦) ، (٦ ، ٠) ، (٠ ، ٤) ، (٤ ، ٠)]

[٦] إذا كانت : ٩ ، ب ، حـ ثلاث نقط تقع على استقامة واحدة
و كان : ٩ب = ب حـ ، ٩ (١ ، ٣) ، حـ (٥ ، ١) فإن :
إحداثيى ب هى ....
[(-٣ ، -٢) ، (٧ ، ٠) ، (٦ ، ٤) ، (٣ ، ٢)]

[٧] إذا كانت : ٩ ، ب ، حـ ثلاث نقط تقع على استقامة واحدة
و كان : ٩ب = ب حـ ، ٩ (٣ ، ٢) ، ب (٥ ، ١)
فإن : إحداثيى حـ هى ....
[(-٣ ، -٢) ، (٧ ، ٠) ، (٦ ، ٤) ، (٣ ، ٢)]

أحمد الشتوى

الدرس الثالث : ميل الخط المستقيم

نعلم أن :

١) ميل المستقيم المار بالنقطتين ($س_1$ ، $ص_1$) ، ($س_2$ ، $ص_2$)

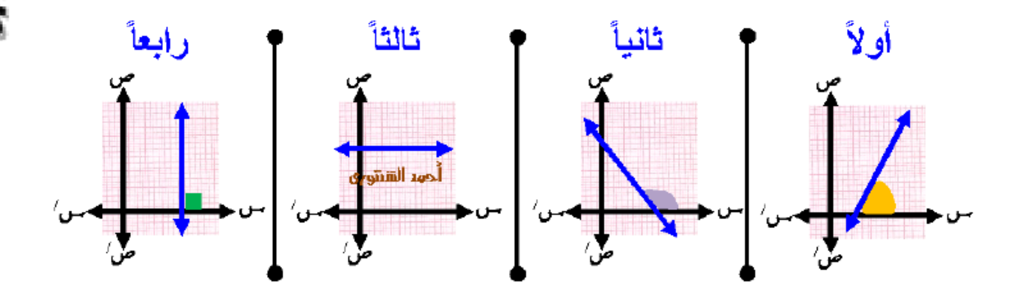
يساوى $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ حيث : $س_2 > س_1$

فمثلاً :

المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٢) ، (٤ ، ٣) يكون :

ميله (م) = $\frac{٣ - ٢}{٤ - ١}$ = $\frac{١}{٣}$

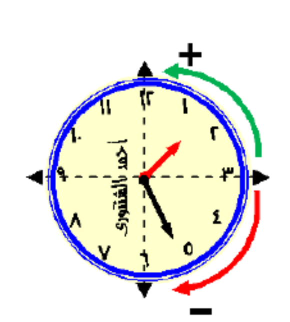
٢) الخط المستقيم يأخذ أحد الأشكال التالية بحسب قيمة ($ص_2 - ص_1$)



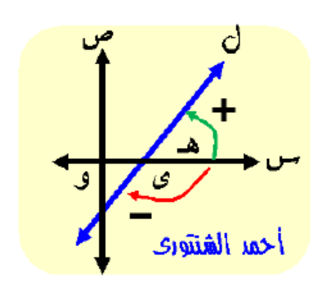
٣) ميل أى مستقيم أفقى (موازى لمحور السينات) = صفر

٤) ميل أى مستقيم رأسى (موازى لمحور الصادات) غير معرف

القياس الموجب و القياس السالب للزاوية :



تكون الزاوية **موجبة** إذا كانت مأخوذة فى عكس إتجاه حركة عقارب الساعة ، و تكون الزاوية **سالبة** إذا كانت مأخوذة فى نفس إتجاه حركة عقارب الساعة



ففى الشكل المقابل :

المستقيم ل يصنع الزاويتين المتكاملتين هـ ، ى مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

و تكون : ∠ هـ موجبة

أى : ق (∠ هـ) موجباً ،

∠ ى سالبة أى : ق (∠ ى) سالباً

فمن الأشكال السابقة نستنتج :

الشكل	ميل الخط المستقيم	قياس الزاوية التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات
أولاً	موجب (أكبر من الصفر)	حادة
ثانياً	سالب (أصغر من الصفر)	منفرجة
ثالثاً	يساوى صفراً	صفرية
رابعاً	غير معرف	قائمة

تعريف :

ميل الخط المستقيم :

هو ظل الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

أى أن : ميل الخط المستقيم = طا هـ

حيث : هـ الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

فمثلاً :

[١] إذا كان : ميل المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٢٥ً ٤٦َ ٥٠°

فإن : ميل المستقيم = طا ٢٥ً ٤٦َ ٥٠°

، و باستخدام الآلة الحاسبة يكون : م = ١,٢٢٥٠

[٢] إذا كان ميل مستقيم = ٠,٣٦٧٣ فإن : قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هى الزاوية التى ظلها = ٠,٣٦٧٣ ، و باستخدام الآلة الحاسبة يكون :

∵ م = طا هـ = ٠,٣٦٧٣ ∴ ق(∠ هـ) = ٦ً ١٠َ ٢٠°

(أ) أكمل مستخدماً الآلة الحاسبة الجدول التالى حيث : هـ الزاوية الموجبة التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

	[١]	[٢]	[٣]	[٤]	[٥]	[٦]
م		$\sqrt{3}$	١			١,٠٢٤٦
ق(∠هـ)	٣٠°			١٣٥°	٤١ً ٣َ ٥٦°	

العلاقة بين ميلى المستقيمين المتوازيين :

الشكل المقابل :

يمثل مستقيمين متوازيين $ل_1$ ، $ل_2$ ميلاهما $م_1$ ، $م_2$ و يصنعان زاويتين موجبتين مع الإتجاه الموجب لمحور السينات هـ ، ى على الترتيب فيكون :

ق(∠ هـ) = ق(∠ ى) لأنهما متناظرتان

، و بالتالى يكون : طا هـ = طا ى ، $م_1$ = $م_2$

مما سبق نستنتج أن :

إذا كان : $ل_1$ // $ل_2$ فإن : $م_1$ = $م_2$

أى أن : إذا توازى مستقيمان فإن ميليهما يكونان متساويين و العكس صحيح

فإذا كان : $م_1$ = $م_2$ فإن : $ل_1$ // $ل_2$

أى أن : إذا تساوى ميلا مستقيمين كان المستقيمان متوازيين

فمثلاً :

إذا كان : المستقيم $ل_1$ يمر بالنقطتين (–٣ ، ٢) ، (١ ، ٦)

فإن : $م_1 = \frac{٣ + ١}{٦ - ٢} = ١$

و إذا كان : المستقيم $ل_2$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥° فإن : $م_2$ = طا ٤٥° = ١

، ∵ $م_1$ = $م_2$ ∴ $ل_1$ // $ل_2$

(٢) إذا كان : المستقيم ل$_١$ يمر بالنقطتين (ك ، ١) ، (٢ ، ٠)
، و المستقيم ل$_٢$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية
قياسها ٤٥° متوازيان أوجد قيمة ك

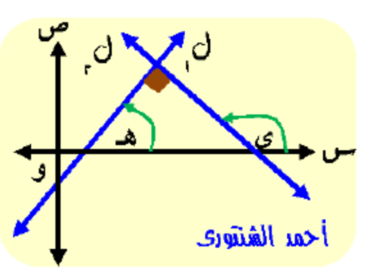
(٣) إذا كان : المستقيم ل$_١$ يمر بالنقطتين (١ ، ٠) ، (٢ ، ك)
، و المستقيم ل$_٢$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية
قياسها ٦٠° متوازيان أوجد قيمة ك

(٤) إذا كان : المستقيم ل يمر بالنقطتين (–١ ، ك) ، (٣ ، –٣)
يوازى محور السينات أوجد قيمة ك

(٥) إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ حيث أ (٣ ، ٤) ، ب (١ ، ٢) ،
، حـ (ك + ٣ ، ٤) ، ء (–٢ ، ٣) أوجد قيمة ك

أحمد الشتورى

العلاقة بين ميلى المستقيمين المتعامدين :



الشكل المقابل :

يمثل مستقيمين متعامدين $\text{ل}_١$ ، $\text{ل}_٢$

ميلاهما $\text{م}_١$ ، $\text{م}_٢$ و يصنعان زاويتين

موجبتين مع الإتجاه الموجب لمحور

السينات هـ ، ى على الترتيب فإن :

$\text{ق}(\angle \text{ى}) = \text{ق}(\angle \text{هـ}) + ٩٠^\circ$

فإذا كان : $\text{ق}(\angle \text{هـ}) = ٤٥^\circ$ فإن : $\text{ق}(\angle \text{ى}) = ١٣٥^\circ$

و باستخدام الآلة الحاسبة يكون :

طا هـ = طا ٤٥° = ١ ، طا ى = طا ١٣٥° = −١

، و بالتالى يكون : طا هـ × طا ى = −١

أى أن : $\text{م}_١ \times \text{م}_٢ = -١$

ملاحظة :

تحقق من ذلك باختيار قياسات أخرى للزاويتين : هـ ، ى

مما سبق نستنتج أن :

إذا كان : $\text{ل}_١$ ، $\text{ل}_٢$ مستقيمان ميلاهما $\text{م}_١$ ، $\text{م}_٢$ حيث $\text{م}_١$ ، $\text{م}_٢ \in \text{ح}$

و كان : $\text{ل}_١ \perp \text{ل}_٢$ فإن : $\text{م}_١ \times \text{م}_٢ = -١$

أى أن : حاصل ضرب ميلى المستقيمين المتعامدين = −١

و العكس صحيح

فإذا كان : $\text{م}_١ \times \text{م}_٢ = -١$ فإن : $\text{ل}_١ \perp \text{ل}_٢$

أى أن : حاصل ضرب ميلى المستقيمين المتعامدين = −١

فإن المستقيمين يكونان متعامدين



فمثلاً :

إذا كان : المستقيم $\text{ل}_١$ يمر بالنقطتين (−١ ، ٠) ، (١ ، ٣)

فإن : $\text{م}_١ = \frac{٣ - ٠}{١ + ١} = \frac{٣}{٢}$

و إذا كان : المستقيم $\text{ل}_٢$ يمر بالنقطتين (−١ ، ٥) ، (٢ ، ٣)

فإن : $\text{م}_٢ = \frac{٣ - ٥}{٢ + ١} = -\frac{٢}{٣}$

، $\because \text{م}_١ \times \text{م}_٢ = \frac{٣}{٢} \times \left(-\frac{٢}{٣}\right) = -١ \qquad \therefore \text{ل}_١ \perp \text{ل}_٢$

(٦) أثبت أن المستقيم المار بالنقطتين (٤ ، ٣$\sqrt{٣}$) ، (٥ ، ٢$\sqrt{٣}$) عمودى على المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٣٠°

(٧) إذا كان : المستقيم $ل_١$ يمر بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٢ ، ك)
، و المستقيم $ل_٢$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية
قياسها ٤٥° أوجد قيمة ك إذا كان : $ل_١ \perp ل_٢$

(٨) أوجد قياس الزاوية التى يصنعها المستقيم ل مع الاتجاه الموجب
لمحور السينات إذا المستقيم ل عمودياً على المستقيم المار بالنقطتين
(–٢ ، ٥) ، (٤ ، –١)

ملاحظات :

١] إذا كان : ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = ميل $\overleftrightarrow{\text{بحـ}}$ فإن : النقط أ ، ب ، حـ تقع على إستقامة واحدة لأنهما مشتركان فى نقطة ب

٢] إذا كان : ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = ميل $\overleftrightarrow{\text{بحـ}}$ فإن : النقط أ ، ب ، حـ هى رؤوس مثلث

٢] لإثبات أن : المثلث أ ب حـ قائم الزاوية فى ب
نثبت أن : $\overline{\text{أب}} \perp \overline{\text{بحـ}}$

٣] لإثبات أن : الشكل أ ب حـ ء متوازى أضلاع
نثبت أن : $\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{ءحـ}}$ ، $\overline{\text{أء}} \parallel \overline{\text{بحـ}}$

٤] لإثبات أن : الشكل أ ب حـ ء مستطيل
نثبت أن : $\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{ءحـ}}$ ، $\overline{\text{أء}} \parallel \overline{\text{بحـ}}$ ، $\overline{\text{أب}} \perp \overline{\text{بحـ}}$

٥] لإثبات أن : الشكل أ ب حـ ء معين
نثبت أن : $\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{ءحـ}}$ ، $\overline{\text{أء}} \parallel \overline{\text{بحـ}}$ ، $\overline{\text{أحـ}} \perp \overline{\text{بء}}$

٦] لإثبات أن : الشكل أ ب حـ ء مربع نثبت أن :
$\overline{\text{أب}} \parallel \overline{\text{ءحـ}}$ ، $\overline{\text{أء}} \parallel \overline{\text{بحـ}}$ ، $\overline{\text{أب}} \perp \overline{\text{بحـ}}$ ، $\overline{\text{أحـ}} \perp \overline{\text{بء}}$

٧] لإثبات أن : الشكل أ ب حـ ء شبه منحرف
نثبت أن : ضلعين متقابلين فيه متوازيين و الضلعين الآخرين غير متوازيين

فمثلاً :

النقط : أ (٤ ، ٣) ، ب (١ ، ١) ، حـ (–٥ ، –٣) تقع على استقامة واحدة لأن : نقطة أ مشتركة ، $\overleftrightarrow{\text{أب}} \parallel \overleftrightarrow{\text{أحـ}}$ حيث :

ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}} = \frac{١ - ٣}{١ - ٤} = \frac{٢}{٣}$ ، ميل $\overleftrightarrow{\text{أحـ}} = \frac{-٣ - ٣}{-٥ - ٤} = \frac{٢}{٣}$

أحمد الشنتورى

(٩) أثبت أن النقط : ﻡ (١ ، ١) ، ب (٢ ، ٣) ، حـ (٠ ، −١)
تقع على استقامة واحدة

(١٠) إذا كانت النقط : ﻡ (٠ ، ١) ، ب (١ ، ك) ، حـ (٢ ، ٥)
تقع على استقامة واحدة أوجد قيمة : ك

(١١) إذا كان : ﻡ (−١ ، −١) ، ب (٢ ، ٣) ، حـ (٦ ، ٠)
أثبت باستخدام الميل أن : Δ ﻡ ب حـ قائم الزاوية فى ب

(١٢) إذا كان المثلث الذى رؤوسه ﻡ (٣ ، ٥) ، ب (٤ ، ٢) ،
حـ (−٥ ، ك) قائم الزاوية فى ب أوجد قيمة : ك

(١٣) أثبت أن النقط : م (–١ ، ١) ، ب (٠ ، ٥) ، حـ (٥ ، ٦) ، ء (٤ ، ٢) أثبت باستخدام الميل أن : الشكل م ب حـ ء متوازى أضلاع

(١٤) أثبت أن النقط : م (–١ ، ٣) ، ب (٥ ، ١) ، حـ (٦ ، ٤) ، ء (٠ ، ٦) أثبت باستخدام الميل أن : الشكل م ب حـ ء مستطيل

(١٥) أثبت أن النقط : م (٤ ، ٣) ، ب (٧ ، ٠) ، حـ (١ ، –٢) هى رؤوس مثلث ، و إذا كانت نقطة ء (١ ، ٢) أثبت باستخدام أن : الشكل م ب حـ ء شبه منحرف

(١٦) إذا كان : م ب حـ ء شبه منحرف فى $\overline{\text{م ب}}$ // $\overline{\text{ء حـ}}$ ، م (٩ ، –٢) ، ب (٣ ، ٢) ، حـ (س ، –س) ، ء (٤ ، –٣) أوجد قيمة : س

أحمد الشتورى

(١٧) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] إذا كان ميل خط مستقيم أصغر من الصفر فإن الزاوية الموجبة يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات تكون ....
[صفرية ، حادة ، قائمة ، منفرجة]

[٢] إذا كان : $م_١$ ، $م_٢$ ميلى مستقيمين متعامدين فإن : ....
[$م_١ - م_٢ = ٠$ ، $م_١ + م_٢ = ٠$ ، $م_١ \times م_٢ = -١$ ، $م_١ \times م_٢ = ٠$]

[٣] إذا كان : $م_١$ ، $م_٢$ ميلى مستقيمين متوازيين فإن :
[$م_١ - م_٢ = ٠$ ، $م_١ + م_٢ = ٠$ ، $م_١ \times م_٢ = -١$ ، $م_١ \times م_٢ = ٠$]

[٤] إذا كان : $م_١$ ، $م_٢$ ميلى مستقيمين متعامدين ، و كان : $م_١ = ٠,٧٥$ فإن : $م_٢ = ...$
[$-\frac{٣}{٤}$ ، $-\frac{٤}{٣}$ ، $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٤}{٣}$]

[٥] إذا كان : $م_١$ ، $م_٢$ ميلى مستقيمين متوازيين ، و كان : $م_١ = ٠,٧٥$ فإن : $م_٢ = ...$
[$-\frac{٣}{٤}$ ، $-\frac{٤}{٣}$ ، $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٤}{٣}$]

[٦] المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{٣}{٤}$ ، $-\frac{٤}{٣}$ يكونان ....
[متوازيان ، متعامدان ، منطبقان ، غير متعامدان]

[٧] المستقيم المار بالنقطتين (−١ ، −١) ، (٤ ، ٤) يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها ....°
[٣٠ ، ٤٥ ، ٦٠ ، ١٣٥]

[٨] إذا كان المستقيمان اللذان ميلاهما $-\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{١}{٢}$ ك متعامدان فإن : ك = ...
[$-\frac{٣}{٤}$ ، $-\frac{٤}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، ٣]

[٩] إذا كان المستقيمان اللذان ميلاهما $-\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{١}{٢}$ ك متوازيين فإن : ك = ...
[$-\frac{٣}{٤}$ ، $-\frac{٤}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، ٣]

[١٠] إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (ك ، ٠) ، (٠ ، ٤) عمودياً على المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن : ك = ...
[٤ ، ١ ، −٤ ، −١]

[١١] إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ يوازى محور السينات حيث : أ (٨ ، ٣) ، ب (٢ ، ك) فإن : ك = ...
[٨ ، ٥ ، ٣ ، ٢]

[١٢] إذا كان : أ ب حـ ء مربعاً قطراه $\overline{أحـ}$ ، $\overline{ب ء}$ حيث : أ (٣ ، ٥) ، حـ (٥ ، −١) فإن : ميل $\overline{ب ء}$ = ...
[٣ ، −٣ ، $\frac{١}{٣}$ ، $-\frac{١}{٣}$]

[١٣] إذا كان : أ ب حـ ء متوازى أضلاع حيث : (−١ ، ٤) ، ب (٠ ، ١) فإن : ميل $\overline{ء حـ}$ = ...
[٣ ، −٣ ، $\frac{١}{٣}$ ، $-\frac{١}{٣}$]

أحمد الشتوى

الدرس الرابع : معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله وطول الجزء المقطوع من محور الصادات

تمهيد :

نعلم أن :

العلاقة : أ س + ب ص + حـ = ٠ حيث : أ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠

تسمى علاقة خطية بين المتغيرين س ، ص

و تمثل بيانياً بخط مستقيم

فمثلاً :

الشكل المقابل :

يبين الخط المستقيم الممثل للعلاقة :

٣ س − ٢ ص + ٦ = ٠ .

لسهولة الرسم يفضل إيجاد نقط تقاطع المستقيم مع محورى الإحداثيات كالتالى :

لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات نضع : ص = ٠

∴ ٣ س + ٦ = ٠

و منها : س = − ٢ ∴ (− ٢ ، ٠) يحقق المعادلة

لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات نضع : س = ٠

∴ − ٢ ص + ٦ = ٠ و منها : ص = ٣ ∴ (٠ ، ٣) يحقق المعادلة

أى أن : المستقيم يمر بالنقطتين : (− ٢ ، ٠) ، (٠ ، ٣)

من الرسم نجد :

١) ميل الخط المستقيم موجب (م > ٠) لأنه يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية حادة ، $م = \frac{٣ - ٠}{٠ + ٢} = \frac{٣}{٢}$

٢) يسمى البعد المحصور بين النقطتين و ، ب بالجزء المقطوع من محور الصادات و يرمز له بالرمز (حـ) وطوله = ٣ وحدة طول و يقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، حـ) أى : (٠ ، ٣)

ملاحظة :

يمكن وضع المعادلة : ٣ س − ٢ ص + ٦ = ٠ على الصورة :

ص = م س + حـ و ذلك بوضع المتغير ص فى طرف مستقل

فيكون : ٢ ص = ٣ س + ٦ و بقسمة الطرفين على ٢ ينتج :

ص = $\frac{٣}{٢}$ س + ٣

و من هذه الصورة نلاحظ :

١] ميل المستقيم (م) هو معامل س و يساوى $\frac{٣}{٢}$

٢] طول الجزء المقطوع من محور الصادات هو الحد المطلق

أى : حـ = ٣

و هى نفس النتائج التى حصلنا عليها من الرسم السابق

معادلة الخط المستقيم :

معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله (م) وطول الجزء المقطوع من محور الصادات (حـ) هى : ص = م س + حـ

حيث : م ، حـ ∈ ح

فمثلاً :

١) المستقيم الذى معادلته : ص = – $\frac{١}{٤}$ س + ٥

ميله = – $\frac{١}{٤}$ ، و يقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات

٥ وحدات طولية ، و يمر بالنقطة (٠ ، ٥)

٢) المستقيم الذى معادلته : ص = ٣ س – ٣

ميله = ٣ ، و يقطع من الجزء السالب لمحور الصادات

٣ وحدات طولية ، و يمر بالنقطة (٠ ، –٣)

ملاحظة :

يمكن وضع معادلة الخط المستقيم : أ س + ب ص + حـ = ٠ .

، ب ≠ ٠ على الصورة : ص = م س + حـ كما يلى :

∵ أ س + ب ص + حـ = ٠ ∴ ب ص = – أ س – حـ

، بالقسمة على ب ينتج : ص = – $\frac{أ}{ب}$ س – $\frac{حـ}{ب}$

حيث : م = – $\frac{أ}{ب}$ = – $\frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$

فمثلاً :

١) المستقيم الذى معادلته : ٥ س – ٢ ص + ٤ = ٠ .

ميله = – ($\frac{-٥}{٢}$) = $\frac{٥}{٢}$

و يكون ميل المستقيم الموازى له = $\frac{٥}{٢}$

، ميل المستقيم العمودى عليه = – $\frac{٢}{٥}$

٢) المستقيم الذى معادلته : ٢ س + ٣ ص + ١ = ٠ .

ميله = – $\frac{٢}{٣}$

و يكون ميل المستقيم الموازى له = – $\frac{٢}{٣}$

، ميل المستقيم العمودى عليه = $\frac{٣}{٢}$

٣) لإيجاد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٤) موازياً المستقيم

٢ س – ٣ ص + ١ = ٠ . نتبع ما يلى :

ميل المستقيم المعطى = $\frac{٢}{٣}$ ، ∵ المستقيمان متوازيان

∴ ميل المستقيم المطلوب = $\frac{٢}{٣}$

، نفرض أن معادلة المستقيم المطلوب هى : ص = م س + حـ

∴ معادلة المستقيم المطلوب هى : ص = $\frac{٢}{٣}$ س + حـ

، ∵ المستقيم يمر بالنقطة (٣ ، ٤)

∴ ٤ = $\frac{٢}{٣}$ × ٣ + حـ و منها : حـ = ٢

∴ معادلة المستقيم المطلوب هى : ص = $\frac{٢}{٣}$ س + ٢

، بالضرب × ٣ ينتج : ٣ ص = ٢ س + ٦

(١) أوجد ميل المستقيم و الجزء المقطوع من محور الصادات فى الحالات التالية :

[١] ٤ س – ٣ ص – ١٢ = ٠

[٢] ٢ س + ٤ ص – ٨ = ٠

[٣] ٥ س – ٢ ص + ١٠ = ٠

[٤] س + ٣ ص + ٦ = ٠



(٢) أوجد معادلة الخط المستقيم فى الحالات التالية :

[١] ميله يساوى ٣ و يقطع من محور الصادات جزءاً موجباً مقداره ٥ وحدات

[٢] ميله يساوى – $\frac{١}{٢}$ و يقطع جزءاً من الاتجاه السالب لمحور الصادات يساوى ٣ وحدات

[٣] ميله يساوى $\frac{٢}{٥}$ و المار بالنقطة (٣ ، ٥)

(٣) أوجد معادلة الخط المستقيم فى الحالات التالية :

[أ] المار بالنقطتين (١ ، ١) ، (٢ ، – ١)

[٢] المار بالنقطة (– ١ ، ٤) و يوازى المستقيم الذى معادلته ٢ س – ٣ ص = ٥

[٣] المار بالنقطة (١ ، ٢) و عمودى على المستقيم الذى معادلته ص – ٢ س = ٥

[٤] المار بالنقطة (١ ، ٢) و يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥°

(٤) أوجد معادلة الخط المستقيم العمودى على $\overline{\text{أ ب}}$ من نقطة منتصفها حيث أ (١ ، ٣) ، ب (٣ ، ٥)

(٥) أوجد معادلة الخط المستقيم المار بنقطة أ و بنقطة منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ حيث أ (٥ ، – ٦) ، ب (٣ ، ٧) ، حـ (١ ، – ٣)

(٦) أوجد معادلة الخط المستقيم الذى يقطع من محور الإحداثيات السينى و الصادى جزأين موجبين طوليهما ٤ ، ٩ وحدات طولية على الترتيب ثم أوجد مساحة المثلث المحصور بين المستقيم و محورى الإحداثيات

(٧) أوجد معادلة الخط المستقيم الذى ميله يساوى ميل الخط المستقيم $\frac{ص - ١}{س} = \frac{١}{٣}$ و يقطع من محور الصادات فى النقطة (٠ ، – ٣)

(٨) ٢ ب حـ ء معين ، م نقطة تقاطع قطريه حيث : ٢ (١ ، ٦) ، حـ (٣ ، ٠) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين ب ، ء

(٩) الجدول المقابل يمثل علاقة خطية

[١] أوجد معادلة الخط المستقيم

[٢] أوجد طول الجزء المقطوع من محور الصادات

[٣] أوجد قيمة ٢

س	١	٢	٣
ص = د (س)	١	٣	٢

أحمد الشتوى

(١٠) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

[١] ميل المستقيم الذى معادلته : ٢ س – ٣ ص + ٥ = ٠ يساوى ....
[– ٣/٢ ، – ٢/٣ ، ٣/٢ ، ٢/٣]

[٢] المستقيم الذى معادلته : ٢ س – ٣ ص + ٦ = ٠ و يقطع من محور الصادات جزءاً طوله يساوى ....
[– ٢ ، ٦ ، ٢ ، ٢/٣]

[٣] إذا كان المستقيمان : ٣ س – ٤ ص – ٣ = ٠ ، ك ص + ٤ س = ٨ متعامدان فإن : ك = ...
[٣ ، – ٣ ، ٤ ، – ٤]

[٤] إذا كان المستقيمان : س + ص = ٥ ، ك س + ٢ ص = ٠ متوازيان فإن : ك = ...
[– ٢ ، ٢ ، ١ ، – ١]

[٥] إذا كان المستقيم : ك س + ٣ ص – ٦ = ٠ يمر بالنقطة (– ٢ ، ٤) فإن : ك = ...
[– ٢ ، ٢ ، ٣ ، – ٣]

[٦] معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، – ٢) و يوازى محور السينات هى ....
[ص = س + ٢ ، ص = س – ٢ ، ص = – ٢ ، ص = ٢]

[٧] معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، – ٢) و يوازى محور الصادات هى ....
[س = ص + ٢ ، س = ص – ٢ ، س = – ٢ ، س = ٢]

[٨] مساحة المثلث بالوحدات المربعة المحد بالمستقيمات : س = ٠ ، ص = ٠ ، ٣ س – ٤ ص = ١٢ تساوى ....
[٦ ، ٧ ، ١٢ ، ١٥]

[٩] معادلة المستقيم الذى ميله يساوى ١ و يمر بنقطة الأصل هى ....
[س = ١ ، ص = ١ ، ص = – س ، ص = س]

[١٠] إذا كان المستقيم : ص = س حا ٣٠° + حـ يمر بالنقطة (٤ ، ٦) فإن : حـ = ...
[– ٣ ، ٣ ، ٤ ، – ٤]

[١١] المستقيم : ٣ س – ٣ ص + ٥ = ٠ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها يساوى ....°
[٣٠ ، ٤٥ ، ٦٠ ، ٩٠]

[١٢] معادلة المستقيم الذى ميله = ٥ ، و يقطع جزءاً موجباً من محور الصادات مقداره ٧ وحدات هى ....
[ص = ٥ س + ٧ ، ص = ٥ س – ٧
، ص = – ٥ س + ٧ ، ص = – ٥ س – ٧]

[١٣] ميل المستقيم العمودى على المستقيم : ٢ س – ٣ ص = ٦ يساوى ....
[– ٣/٢ ، – ٢/٣ ، ٣/٢ ، ٢/٣]

[١٤] ميل المستقيم الموازى للمستقيم : ٢ س – ٣ ص = ٦ يساوى ....
[– ٣/٢ ، – ٢/٣ ، ٣/٢ ، ٢/٣]

اجوبة بعض التمارين

الوحدة الأولى — العلاقات و الدوال

الدرس الأول : حاصل الضرب الديكارتى

(١) [أ] س + ٤ = ٨ و منها : س = ٤
، ص – ١ = ٣ و منها : ص = ٤

[ب] س^{٢} + ١ = ٥ ∴ س^{٢} = ٤ و منها : س = ± ٢
، ص^{٣} – ١ = ٢٦ ∴ ص^{٣} = ٢٧ و منها : ص = ٣

[جـ] س = √٩ = ٣
، ص + ٢ = ∛٨ = ٢ و منها : ص = صفر

(٢) س = {١ ، ٢ ، ٤} ، ص = {– ١ ، ١} أوجد :
س × ص = {(١ ، – ١) ، (١ ، ١) ، (٢ ، – ١) ، (٢ ، ١) ، (٤ ، – ١) ، (٤ ، ١)}
، ن (س × ص) = ٦

(٣) س = {١ ، ٢ ، ٤} ، ص = {– ١ ، ١} أوجد :
ص × س = {(– ١ ، ١) ، (– ١ ، ٢) ، (– ١ ، ٤) ، (١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (١ ، ٤)}
، ن (ص × س) = ٦

(٤) س = {١ ، ٢ ، ٤} أوجد : س^{٢} ، ن (س^{٢})
س^{٢} = {(١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (١ ، ٤) ، (٢ ، ١)
، (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٤ ، ١) ، (٤ ، ٢)
، (٤ ، ٤)} ، ن (س^{٢}) = ٩

(٥) س × ص = {(١ ، ٣) ، (١ ، ٤) ، (١ ، ٥)
، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٥)}
ص × س = {(٣ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٤ ، ١)
، (٤ ، ٢) ، (٥ ، ١) ، (٥ ، ٢)}
س^{٢} = {(١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٢)}
مثل المخطط السهمى بنفسك

(٦) س × ص = {(– ٢ ، ٠) ، (– ٢ ، ١) ، (– ٢ ، ٢)
، (٣ ، ٠) ، (٣ ، ١) ، (٣ ، ٢)}
ص × ع = {(٠ ، ١) ، (٠ ، ٤) ، (١ ، ١)
، (١ ، ٤) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٤)}
ع^{٢} = {(١ ، ١) ، (١ ، ٤) ، (٤ ، ١) ، (٤ ، ٤)}
مثل المخطط البيانى بنفسك ، ن (س × ع) = ٤
، ن (س^{٢}) = ٤ ، ن (ص^{٢}) = ٩

(٧) ص ∩ ع = {٥}
∴ س × (ص ∩ ع) = {٣ ، ٤} × {٥}
= {(٣ ، ٥) ، (٤ ، ٥)} ، س – ص = {٣}
∴ (س – ص) × ع = {٣} × {٦ ، ٥}
= {(٣ ، ٦) ، (٣ ، ٥)} ، ص – ع = {٤}
∴ (س – ص) × (ص – ع) = {٣} × {٤}

= { (٣ ، ٤) }

(٨) س = { ٢ ، ٥ } ، ص = { ٣ ، ٤ ، ٥ }

س × ص = { (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٥) ، (٥ ، ٣) ، (٥ ، ٤) ، (٥ ، ٥) }

ص × س = { (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٥) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٥) ، (٥ ، ٢) ، (٥ ، ٥) }

∴ (س × ص) ∩ (ص × س) = { (٥ ، ٥) }

(٩) س = { ٢ ، ٣ ، ٥ } ، ص = { ٦ ، ٩ }

ص × س = { (٦ ، ٢) ، (٦ ، ٣) ، (٦ ، ٥) ، (٩ ، ٢) ، (٩ ، ٣) ، (٩ ، ٥) }

(١٠) أرسم الشبكة و عين النقط بنفسك

أ تقع فى الربع الرابع ، ب تقع على محور السينات ،
حـ تقع فى الربع الثالث ، ء تقع فى الربع الثانى ،
هـ تقع على محور الصادات ، و تقع فى الربع الأول

(١١) [١] ٩٠°

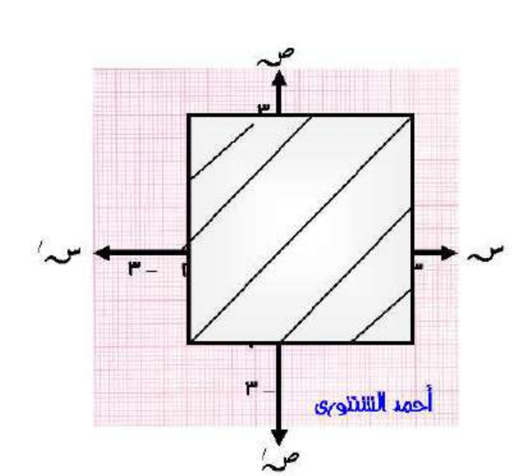
[٢] مثلث قائم الزاوية

[٣] ٣ + ٤ + ٥ = ١٢ وحدة طول

[٤] ½ × ٣ × ٤ = ٦ وحدة مساحة

(١٢) س = [−٢ ، ٣]

المنطقة المظللة تمثل
س × س
أ ∈ س × س
، ب ∈ س × س
، حـ ∉ س × س
، ء ∈ س × س



(١٣) [١] أ ∩ ب = { ٢ ، ٤ } ، ب ∩ حـ = { ٣ ، ٤ }

∴ (أ ∩ ب) × (ب ∩ حـ) = { ٢ ، ٤ } × { ٣ ، ٤ } =
{ (٢،٣) ، (٢،٤) ، (٤،٣) ، (٤،٤) }

[٢] أ − ب = { ١ } ، ب ∪ حـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

∴ (أ − ب) × (ب ∪ حـ) = { ١ } × { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } =
{ (١،١) ، (١،٢) ، (١،٣) ، (١،٤) }

(١٤) ع × (س − ص) = (ع × س) − (ع × ص)

س − ص = { ٢ }

∴ ع × (س − ص) = { ٥ ، ٦ } × { ٢ }
= { (٥ ، ٢) ، (٦ ، ٢) } (١)

ع × س = { ٥ ، ٦ } × { ١ ، ٢ ، ٣ } =
{ (٥،١) ، (٥،٢) ، (٥،٣) ، (٦،١) ، (٦،٢) ،
(٦،٣) }

ع × ص = { ٥ ، ٦ } × { ١ ، ٣ ، ٤ } =
{ (٥ ، ١) ، (٥ ، ٣) ، (٥ ، ٤) ، (٦ ، ١) ، (٦ ، ٣) ،
(٦ ، ٤) }

∴ (ع × س) − (ع × ص) = { (٥ ، ٢) ، (٦ ، ٢) } (٢)

من (١) ، (٢) ينتج :

ع × (س − ص) = (ع × س) − (ع × ص)

(١٥) س = { أ ، ٣ } ، ص = { ٢ ، ٣ ، ٤ }

، ∵ س ⊂ ص ∴ أ ∈ ص

، ∵ أ ⩽ ٢ ∴ أ = ٢

(١٦) [١] ٨ [٢] ٣ [٣] ٥ [٤] { ١ ، ٢ } [٥] ص × س

[٦] س^{2} [٧] { (٢ ، ٥) } [٨] { ١ } × { ٤ }

(١٧) [١] فى الربع الثانى [٢] (−١ ، −١) [٣] ٣

[٤] ٤ [٥] ٥ [٦] ٢ [٧] ص^{2}

الدرس الثانى : العلاقات

(١) ع = { (١ ، ٧) ، (٢ ، ٦) ، (٣ ، ٥) }
مثل بنفسك

(٢) ع = { (٣ ، ٢) ، (٧ ، ٤) ، (٩ ، ٥) }
مثل بنفسك

(٣) ع = { (١ ، ٨) ، (١ ، ١٠) ، (٢ ، ٧) ، (٣ ، ٨) ،
(٣ ، ١٠) }
مثل بنفسك

(٤) ع = { (١ ، ٢) ، (١ ، ٤) ، (١ ، ٦) ، (٢ ، ٢) ،
(٢ ، ٤) ، (٢ ، ٦) ، (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٦) }
مثل بنفسك

(٥) ع = { (−١ ، ١) ، (٠ ، ٠) ، (١ ، ١) ، (٢ ، ٤) ،
(٣ ، ٩)   مثل بنفسك

(٦) ع = { ($\frac{1}{3}$ ، ٣) ، ($\frac{1}{2}$ ، ٢) ، (١ ، ١) ، (٢ ، $\frac{1}{2}$) ،
(٣ ، $\frac{1}{3}$) }   مثل بنفسك

(٧) ع = { (١ ، ١) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٤ ، ١) ،
(٤ ، ٢) ، (٤ ، ٤) ، (٦ ، ١) ، (٦ ، ٢) ،
(٦ ، ٦) ، (١٠ ، ١) ، (١٠ ، ٢) ، (١٠ ، ١٠) }
مثل بنفسك

(٨) [١] ع$_{1}$ = { (٢ ، ٦) ، (٣ ، ٩) }

[٢] ع$_{2}$ = { (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦) }

[٣] ع$_{3}$ = { (٤ ، ٢) ، (٦ ، ٣) }

[٤] ع$_{4}$ = { (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٦) ، (٣ ، ٣) ،
(٣ ، ٦) ، (٣ ، ٩) ، (٤ ، ٤) ، (٦ ، ٦) ،
(٩ ، ٩) }   مثل بنفسك

(٩) [١] ع$_{1}$ علاقة من س إلى ص

[٢] ع$_{2}$ علاقة من ص إلى ل

[٣] ع$_{3}$ علاقة من ل إلى ص

[٤] ع$_{4}$ علاقة من ص إلى س

(١٠) [١] ١٢ [٢] ٥ [٣] $\frac{٤}{٣}$ [٤] $\frac{٢}{٥}$

(١١) [١] ٣ [٢] ٢ [٣] ٦ [٤] ٤

(١٢) [١] ∉ [٢] ∉ [٣] ∈ [٤] ∈ [٥] ∈ [٦] ∈ [٧] ∉

(١٤) ع = {(١ ، ١) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٩)}

(١٣) ع = {(١ ، ٠) ، (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣)}

(١٥) ع = {(١ ، ٧) ، (٢ ، ٨) ، (٣ ، ٦) ، (٣ ، ٧) ، (٤ ، ٧)}

(١٦) ع = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٣)}

الدرس الثالث : الدالة (التطبيق)

(١) [١] ع$_{1}$ ليست دالة لأن : العنصر ٥ ∈ س لم يظهر كمسقط أول في أياً من الأزواج المرتبة المحددة لبيان العلاقة

[٢] ع$_{2}$ ليست دالة لأن : العنصر ٣ ∈ س ظهر كمسقط أول أكثر من مرة مرتين حيث ظهر في الزوجين المرتبين (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٥)

[٣] ع$_{3}$ دالة لأن كل عنصر من عناصر س ظهر كمسقط مرة واحدة فقط في بيان العلاقة

(٢) ع$_{1}$ = {(١ ، ٤) ، (٣ ، ٦)}

، ع$_{1}$ ليست دالة لأن : العنصر ٢ ∈ س لم يخرج منه سهم إلى أي عنصر من عناصر ص

ع$_{2}$ = {(١ ، ٦) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٤)}

، ع$_{2}$ لأن : كل عنصر من عناصر س خرج سهم واحد فقط إلى عنصر من عناصر ص

ع$_{3}$ = {(١ ، ٦) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٦)}

، ع$_{3}$ ليست دالة لأن : العنصر ٣ ∈ س خرج منه سهمان إلى أي كل من ٤ ، ٦ ∈ ص

(٣) ع$_{1}$ = {(٠ ، ٣) ، (٢ ، ٣) ، (٤ ، ٣)}

، ع$_{1}$ دالة لأن : تظهر نقطة واحدة فقط على الخط الرأسي لكل عنصر من عناصر س في المخطط البياني الممثل للعلاقة

المدى = { ٣ }

ع$_{2}$ = {(٠ ، ٥) ، (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٤ ، ١)}

، ع$_{2}$ ليست دالة لأن : توجد نقطتين على أحد الخطوط الرأسية للعنصر ٢ ∈ س هما (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣)

ع$_{3}$ = {(٢ ، ١) ، (٤ ، ٥)}

، ع$_{3}$ ليست دالة لأن : لا توجد أي نقطة على الخط الرأسي للعنصر ٠ ∈ س في المخطط البياني الممثل للعلاقة.

(٤) بيان د = {(٣ ، ٣) ، (٤ ، ٥) ، (٥ ، ٤) ، (٦ ، ٥)}

المدى = { ٣ ، ٥ ، ٤ ، ٦ } ، مثل بنفسك

(٥) [١] { (١ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٥) ، (٤ ، ٦) }

[٢] { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }   [٣] ارسم بنفسك

(٦) بيان ع = { (١ ، ٦) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٨) }

، ع دالة لأن كل عنصر من عناصر س ظهر كمسقط مرة واحدة فقط فى بيان ع ، مثل بنفسك

المدى = { ٦ ، ٥ ، ٨ }

(٧) بيان ع = {(١ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٥) ، (١ ، ٦) ، (٤ ، ١) ، (٤ ، ٣) }

، ع ليست دالة لأن العنصر ١ ظهر كمسقط أول أكثر من مرة فى بيان ع ، مثل بنفسك

(٨) بيان ع = {(١ ، ١) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٤ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٤) ، (٦ ، ١) ، (٦ ، ٢) ، (٦ ، ٦) ، (١٠ ، ١) ، (١٠ ، ٢) ، (١٠ ، ١٠) }

، ع ليست دالة لأن العنصر ١ ظهر كمسقط أول أكثر من مرة فى بيان ع ، مثل بنفسك

(٩) إذا كانت : س = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

بيان ع = { (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٣) ، (٥ ، ٢) }

، ع دالة لأن كل عنصر من عناصر س ظهر كمسقط مرة واحدة فقط فى بيان ع ، مثل بنفسك

المدى = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

(١٠) بيان ع = {(١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٦) ، (١ ، ١١) ، (٣ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٦) ، (٣ ، ١١) ، (١١ ، ١) ، (١١ ، ٢) ، (١١ ، ٣) ، (١١ ، ٦) ، (١١ ، ١١) }

، ع ليست دالة لأن العنصر ١ ظهر كمسقط أول أكثر من مرة فى بيان ع ، مثل بنفسك

(١١) بيان ع = {(٢ ، ١٠) ، (٢ ، ١٦) ، (٢ ، ٢٤) ، (٢ ، ٣٠) ، (٥ ، ١٠) ، (٥ ، ٣٠) ، (٢ ، ٢٤) ، (٨ ، ١٦) ، (٨ ، ٢٤) }

، ع ليست دالة لأن العنصر ٢ ظهر كمسقط أول أكثر من مرة فى بيان ع ، مثل بنفسك

(١٢) [١] {(٣ ، ٥) ، (٥ ، ٥) ، (٥ ، ٧) }   [٢] ٨

[٣] { ٣ ، ٦ }   [٤] ٣   [٥] صفر   [٦] – ٧   [٧] المدى

[٨] س   [٩] ص   [١٠] { ٣ ، ٧ ، ١١ }

الدرس الرابع : دوال كثيرات الحدود

(١) [١] كثيرة حدود   [٢] ليست كثيرة حدود   [٣] ليست كثيرة حدود

[٤] ليست كثيرة حدود   [٥] كثيرة حدود

(٢) [١] الرابعة   [٢] الأولى   [٣] د (س) = ٢ ، الصفرية

[٤] د (س) = $س^{٣}$ – ٥ ، الثالثة

[٥] د (س) = س^{٢} + س − ٢ ، الثانية

[٦] د (س) = س^{٢} − ٢ س^{٣} ، الثالثة

[٧] د (س) = س^{٤} − ٦ س^{٣} + ٢ س^{٢} ، الرابعة

(٣) إذا كان : د (س) = س^{٢} − ٣ س + ٢ أوجد :

[١] د (٢) = (٢)^{٢} − ٣ × ٢ + ٢ = ٤ − ٦ + ٢ = ٠

[٢] د (١) = (١)^{٢} − ٣ × ١ + ٢ = ١ − ٣ + ٢ = ٠

[٣] د (−٣) = (−٣)^{٢} − ٣ × (−٣) + ٢ = ٩ + ٩ + ٢ = ٢٠

[٤] د ($\sqrt{٣}$) = = ($\sqrt{٣}$)^{٢} − ٣ × $\sqrt{٣}$ + ٢

= ٣ − ٣ $\sqrt{٣}$ + ٢ = ٥ − ٣ $\sqrt{٣}$

[٥] د ($\frac{١}{٢}$) = ($\frac{١}{٢}$)^{٢} − ٣ × $\frac{١}{٢}$ + ٢ = ٩ + ٩ + ٢ = $\frac{٣}{٤}$

(٤) مثل بنفسك ،

[١] المستقيم يقطع محور السينات فى النقطة (١ ، ٠) ، و يقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، −١)

س	٠	١	٢
ص	−١	٠	١

[٢] المستقيم يقطع محور السينات فى النقطة (٢ ، ٠) ، و يقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ٢)

س	٠	٢	١
ص	٢	٠	١

[٣] المستقيم يقطع محور السينات في النقطة (−$\frac{١}{٢}$ ، ٠) ، و يقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ١)

س	٠	−$\frac{١}{٢}$	٢
ص	١	٠	٥

[٤] المستقيم يقطع محور السينات فى النقطة ($\frac{٣}{٢}$ ، ٠) ، و يقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ٣)

س	٠	$\frac{٣}{٢}$	٢
ص	٣	٠	−١

(٥) مثل بنفسك ، المستقيمان يمران بنقطة الأصل ،

[١] المستقيم يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية حادة

[٢] المستقيم يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية منفرجة

(٦) مثل بنفسك ،

[١] المستقيم يوازى محور السينات و يمر بالنقطة (٠ ، ٢)

[٢] المستقيم يوازى محور السينات و يمر بالنقطة (٠ ، −٣)

(٧)

س	−٤	−٣	−٢	−١	٠	١	٢
ص = د (س)	٩	٤	١	٠	١	٤	٩

مثل بنفسك ، إحداثى نقطة رأس المنحنى هى : (−١ ، ٠)

معادلة محور التماثل هى : س = −١ القيمة الصغرى للدالة = ٠

(٨)

س	−١	٠	١	٢	٣
ص = د (س)	−٣	٣	٥	٣	−٣

مثل بنفسك ، إحداثى نقطة رأس المنحنى هى : (١ ، ٥)

معادلة محور التماثل هى : س = ١ القيمة العظمى للدالة = ٥

(٩)

س	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
ص = د (س)	٩	٤	١	٠	١	٤	٩

مثل بنفسك ، إحداثى نقطة رأس المنحنى هى : (٣ ، ٠)

معادلة محور التماثل هى : س = ٣ القيمة الصغرى للدالة = ٠ .

(١٠) إذا كان : د (س) = أ $س^{٢}$ + ب س − ٣ ، و كان : ب = ٢ أ

∵ (١ ، − ٤) ينتمى إلى بيان الدالة

∴ − ٤ = أ + ب − ٣ ∴ أ + ب = − ١

، ∵ ب = ٢ أ ∴ أ + ٢ أ = − ١

∴ − أ = − ١ ∴ أ = ١ ، ب = − ٢

∴ د (س) = أ $س^{٢}$ − ٢ س − ٣ ، و يكون :

س	− ٢	− ١	٠	١	٢	٣	٤
ص = د (س)	٥	٠	− ٣	− ٤	− ٣	٠	٥

مثل بنفسك

(١١) ∵ أ و = ٤ وحدات ∴ إحداثى أ (٠ ، ٤)

∴ د (٠) = ٤ ∴ ٤ = م − ٠ ∴ م = ٤

∴ د (س) = ٤ − $س^{٢}$ بوضع : د (س) = ٠

∴ ٤ − $س^{٢}$ = ٠ ∴ س = ± ٢

∴ ب (٢ ، ٠) ، حـ (− ٢ ، ٠)

∴ مساحة △ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٤ = ٨ وحدة مساحة

(١٢) [١] (٠ ، ٠) [٢] ٥ [٣] ١٠ [٤] صفر [٥] ٣ [٦] ٣

[٧] ١ [٨] صفر [٩] الثالثة [١٠] الرابعة [١١] الثانية

[١٢] ٢ [١٣] ٢ [١٤] ١

الوحدة الثانية النسبة و التناسب

و التغير الطردى و التغير العكسى

الدرس الأول : النسبة

(١) نفرض أن : العدد = س ∴ $\frac{٧ + س}{١٢ + س} = \frac{٢}{٣}$

∴ ٢١ + ٣ س = ٢٤ + ٢ س و منها : س = ٣

(٢) نفرض أن : العدد = س ∴ $\frac{٥ - س}{٦ - س} = \frac{٣}{٢}$

∴ ١٨ − ٣ س = ١٠ − ٢ س و منها : س = ٨

(٣) نفرض أن : العدد = س ∴ ثلاثة أمثاله = ٣ س

∴ $\frac{٤٩ - ٣ س}{٦٩ - ٣ س} = \frac{٢}{٣}$ ∴ ١٤٧ − ٩ س = ١٣٨ − ٦ س

∴ ٣ س = ٩ و منها : س = ٣

(٤) نفرض أن : العدد = س ∴ مربعه = $س^{٢}$

∴ $\frac{١٧ + س^{٢}}{١١ + س^{٢}} = \frac{٧}{٦}$ ∴ ١٠٢ + ٦ $س^{٢}$ = ٧٧ + ٧ $س^{٢}$

∴ $س^{٢}$ = ٢٥ و منها : س = ٥

(٥) ∵ النسبة بين العددين ٣ : ٤

∴ نفرض أن العدد الأول = ٣ م ، العدد الثانى = ٤ م

∴ $\frac{\text{٣م} + ٤}{\text{٤م} - ٣} = \frac{٨}{٩}$

∴ ٣٢م − ٢٤ = ٢٧م + ٣٦

∴ ٥م = ٦٠   ∴ م = ١٢

∴ العدد الأول = ٣ × ١٢ = ٣٦ ، العدد الثانى = ٤ × ١٢ = ٤٨

(٦) ∵ النسبة بين العددين = ١ : ٢

∴ نفرض أن العدد الأصغر = م ، العدد الأكبر = ٢م

∴ $\text{م}^٢$ − ٤ × ٢م = ٩   ∴ $\text{م}^٢$ − ٨م − ٩ = ٠

∴ (م − ٩) (م + ١) = ٠

و منها : م = ٩ ، م = −١ مرفوض

∴ العدد الأصغر = ٩ ، العدد الأكبر = ٢ × ٩ = ١٨

(٧) ∵ النسبة بين بعدى المستطيل = ٢ : ٣

∴ نفرض أن : الطول = ٣ س سم ، العرض = ٢ س سم

∴ ٢ (٣ س + ٢ س) = ٦٠   ∴ ١٠ س = ٦٠ و منها : س = ٦

∴ الطول = ٣ × ٦ = ١٨ سم ، العرض = ٢ × ٦ = ١٢ سم

، مساحة المستطيل = ١٨ × ١٢ = ٢١٦ $\text{سم}^٢$

(٨) ∵ النسبة بين طول قاعدة و ارتفاع مثلث = ٣ : ٢

∴ نفرض أن : طول القاعدة = ٣ س سم

، الارتفاع = ٢ س سم

∴ $\frac{١}{٢}$ × ٣ س × ٢ س = ٤٨

∴ ٣ $\text{س}^٢$ = ٤٨   و منها : س = ٤

∴ طول القاعدة = ٣ × ٤ = ١٢ سم

، الارتفاع = ٢ × ٤ = ٨ سم

(٩) نفرض أن : عدد البنين = س ، عدد البنات = ص

∴ عدد التلاميذ الكلى = س + ص

، عدد الناجحين من البنين = س × $\frac{٧٩}{١٠٠}$ = ٠,٧٩ س تلميذاً

، عدد الناجحين من البنات = ص × $\frac{٨٩}{١٠٠}$ = ٠,٨٩ ص تلميذة

∴ عدد الناجحين الكلى = ٠,٧٩ س + ٠,٨٩ ص

∴ نسبة النجاح = $\frac{\text{٠,٧٩ س + ٠,٨٩ ص}}{\text{س + ص}}$ = ٠,٨٣

∴ ٠,٧٩ س + ٠,٨٩ ص = ٠,٨٣ س + ٠,٨٣ ص

∴ ٠,٨٣ س − ٠,٧٩ س = ٠,٨٩ ص − ٠,٨٣ ص

∴ ٠,٠٤ س = ٠,٠٦ ص   ∴ س : ص = ٠,٠٦ : ٠,٠٤

∴ س : ص = ٣ : ٢

(١٠) ∵ النسبة بين طولى الجزئين = ١١ : ٨

∴ نفرض أن : محيط الدائرة = ١١ س سم

، محيط المربع = ٨ س سم   ∴ ١١ س + ٨ س = ١٥٢

∴ ١٩ س = ١٥٢   و منها : س = ٨

∴ محيط الدائرة = ١١ × ٨ = ٨٨ سم

∴ ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × نق = ٨٨   و منها : نق = ١٤ سم

∴ مساحة الدائرة = $\frac{٢٢}{٧}$ × $(١٤)^٢$ = ٦١٦ $\text{سم}^٢$

، محيط المربع = ٨ × ٨ = ٦٤ سم

∴ طول ضلع المربع × ٤ = ٦٤

و منها : طول ضلع المربع = ١٦ سم

∴ مساحة المربع = $(١٦)^{٢}$ = ٢٥٦ سم^{٢}

∴ مساحة الدائرة : مساحة المربع = $\frac{٦١٦}{٢٥٦}$ = ٣٢ : ٧٧

الدرس الثانى : التناسب

(١) نفرض أن : أ = ٢ م ، ب = ٥ م حيث م ثابت ≠ ٠ .

∴ $\frac{\text{٧ أ − ٢ ب}}{\text{٣ أ + ب}} = \frac{\text{١٤ م − ١٠ م}}{\text{٦ م + ١٠ م}} = \frac{\text{٤ م}}{\text{١٦٠ م}} = \frac{١}{٤}$

(٢) نفرض أن : الرابع المتناسب هو س

∴ الكميات : ٤ ، ١٢ ، ١٦ ، س متناسبة

∴ $\frac{٤}{١٢} = \frac{١٦}{\text{س}}$ ∴ ٤ س = ١٢ × ١٦

و منها : س = ٤٨

(٣) نفرض أن : العدد = س

∴ ٣ + س ، ٥ + س ، ٨ + س ، ١٢ + س متناسبة

∴ $\frac{\text{٣ + س}}{\text{٥ + س}} = \frac{\text{٨ + س}}{\text{١٢ + س}}$

∴ ٤٠ + ١٣ س + س^{٢} = ٣٦ + ١٥ س + س^{٢}

∴ ٢ س = ٤ ∴ س = ٢

(٤) ٢ × (٢ س + ٣ ص) = ١ × (٥ س − ص)

∴ ٤ س + ٦ ص = ٥ س − ص ∴ س = ٧ ص

∴ س : ص = ٧ : ١

، بفرض أن : س = ٧ م ، ص = م حيث م ثابت ≠ ٠ .

∴ $\frac{\text{س + ٣ ص}}{\text{س − ص}} = \frac{\text{٧ م + ٣ م}}{\text{٧ م − م}} = \frac{\text{١٠ م}}{\text{٦ م}} = \frac{٥}{٣}$

(٥) ∵ $\frac{\text{س}}{٤} = \frac{\text{ص}}{٥}$ ∴ س = ٤ م ، ص = ٥ م حيث م ثابت ≠ ٠ .

∴ $\frac{\text{٣ س − ٢ ص}}{\text{ص − س}} = \frac{\text{١٢ م − ١٠ م}}{\text{٥ م − ٤ م}} = \frac{\text{٢ م}}{\text{م}}$ = ٥

(٦) ٢٥ س^{٢} − ٢٠ س ص + ٤ ص^{٢} = ٠

∴ $(\text{٥ س − ٢ ص})^{٢}$ = ٠ ∴ ٥ س − ٢ ص = ٠

∴ ٥ س = ٢ ص ∴ س : ص = ٢ : ٥

(٧) بفرض أن : $\frac{\text{أ}}{٣} = \frac{\text{ب}}{٤} = \frac{\text{حـ}}{٥}$ = م ، م ثابت ≠ ٠ .

∴ أ = ٣ م ، ب = ٤ م ، حـ = ٥ م

∴ الطرف الأيمن = $\frac{\text{٨ م − ٥ م}}{\text{٩ م − ٨ م + ٥ م}} = \frac{\text{٣ م}}{\text{٦ م}} = \frac{١}{٢}$ = الطرف الأيسر

(٨) ∵ أ ، ب ، حـ ، ء كميات متناسبة

∴ نفرض أن : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{ء}}$ = م ، م ثابت ≠ ٠ .

∴ أ = ب م ، حـ = ء م

[١] الطرف الأيمن = $\frac{\text{م (٣ ب − ٤ ء)}}{\text{م (ب + ٥ ء)}} = \frac{\text{٣ ب − ٤ ء}}{\text{ب + ٥ ء}}$ = الطرف الأيسر

[٢] الطرف الأيمن = $\frac{\text{م (٥ ب − ٢ ء)}}{\text{٥ ب − ٢ ء}}$ = م (١)

الطرف الأيسر = $\frac{\text{م}(\text{٤ب} + \text{٣ء})}{\text{٤ب} + \text{٣ء}}$ = م (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الطرفان متساويان

(٩) نفرض أن : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ء}}$ = م ، م ثابت ≠ ٠

∴ أ = ب م ، جـ = ء م

∴ الطرف الأيمن = $\frac{\text{م}^{٢}(\text{ب}^{٢} + \text{ء}^{٢})}{\text{ب}^{٢} + \text{ء}^{٢}}$ = $\text{م}^{٢}$ (١)

، الطرف الأيسر = $\frac{\text{ب ء م}^{٢}}{\text{ب ء}}$ = $\text{م}^{٢}$ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الطرفان متساويان

(١٠) ∵ س ، ص ، ع ، ل كميات متناسبة

∴ نفرض أن : $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{ع}}{\text{ل}}$ = م ، م ثابت ≠ ٠

∴ س = ص م ، ع = ل م

الطرف الأيمن = $\frac{\text{م}^{٢}(\text{ص}^{٢} + \text{ل}^{٢})}{\text{م}(\text{ص}^{٢} + \text{ل}^{٢})}$ = م (١)

الطرف الأيسر = $\frac{\text{ص م}}{\text{ص}}$ = م (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الطرفان متساويان

(١١) نفرض أن : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{ء}} = \frac{\text{هـ}}{\text{و}}$ = م ، م ثابت ≠ ٠

∴ أ = ب م ، جـ = ء م ، هـ = و م

∴ الطرف الأيمن = $\frac{\text{م}(\text{٢ب} + \text{٣ء} - \text{٤و})}{\text{٢ب} + \text{٣ء} - \text{٤و}}$ = م (١)

، الطرف الأيسر = $\frac{\text{م}(\text{٥ب} - \text{٧و})}{\text{٥ب} - \text{٧و}}$ = م (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الطرفان متساويان

(١٢) بضرب حدى النسبة الأولى × ٢ و جمع مقدمات و توالى النسبتين الأولى و الثانية ينتج :

إحدى النسب = $\frac{\text{٢س} + \text{ص}}{\text{٤أ} + \text{٤ب} - \text{جـ}}$ (١)

، بضرب حدى النسبة الأولى × ٢ ، حدى النسبة الثانية × ٢ و جمع مقدمات و توالى النسب الثلاث ينتج :

إحدى النسب = $\frac{\text{٢س} + \text{٢ص} + \text{ع}}{\text{٣أ} + \text{٦ب}}$ (٢) ، أكمل بنفسك

(١٣) بضرب حدى النسبة الثانية × ٢ و جمع مقدمات و توالى النسبتين الأولى و الثانية و الاختصار ينتج :

إحدى النسب = $\frac{\text{أ} + \text{٢ب}}{\text{٧ص}}$ (١)

، بضرب حدى النسبة الثانية × ٤ و جمع مقدمات و توالى النسبتين الثانية و الثالة و الاختصار ينتج :

إحدى النسب = $\frac{\text{٤ب} + \text{جـ}}{\text{١٧ص}}$ (٢) ، أكمل بنفسك

(١٤) بجمع مقدمات و توالى النسب الثلاث و الاختصار ينتج :

إحدى النسب = $\frac{\text{س} + \text{ص} + \text{ع}}{١٠}$ (١)

و بطرح النسبة الثانية من حدى النسبة الأولى ينتج :

إحدى النسب = $\frac{\text{س} - \text{ع}}{٢}$ (٢) ، أكمل بنفسك

(١٥) بجمع مقدمات و توالى النسب الثلاث ينتج :

كل نسبة = $\frac{٢(\text{س} + \text{ص})}{\text{س} + \text{ص}}$ = ٢ (بشرط س + ص ≠ ٠)

∴ $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = ٢ و منها : س = ٢ ص (١)

، $\frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{ع}} = ٢$ و منها : $\text{س} + \text{ص} = ٢\,\text{ع}$

و بالتعويض من (١) ينتج : $٣\,\text{ص} = ٢\,\text{ع}$ ∴ $\text{ع} = \frac{٣}{٢}\,\text{ص}$

∴ $\text{س} : \text{ص} : \text{ع} = ٢\,\text{ص} : \text{ص} : \frac{٣}{٢}\,\text{ص} = ٤ : ٢ : ٣$

(١٦) $\text{حـ}\,(\text{ب} - \text{أ}) = \text{أ}\,(\text{حـ} - \text{ء})$

∴ $\text{حـ ب} - \text{حـ أ} = \text{أ ء} - \text{أ حـ}$ ∴ $\text{حـ ب} = \text{أ ء}$

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{ء}}$ ∴ أ ، ب ، حـ ، ء كميات متناسبة

(١٧) نفرض أن : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{حـ}} = \text{م}$

∴ $\text{ب} = \text{حـ م}$ ، $\text{أ} = \text{حـ م}^{٢}$

[١] الطرف الأيمن $= \frac{\text{حـ م}^{٢} + ٢\,\text{حـ م}}{\text{حـ م} + ٢\,\text{حـ}} = \frac{\text{حـ م}\,(\text{م} + ٢)}{\text{حـ}\,(\text{م} + ٢)} = \text{م}$ (١)

الطرف الأيسر $= \frac{\text{حـ}^{٤}\text{م}^{٤}}{\text{حـ}^{٤}\text{م}^{٣}} = \text{م}$ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الطرفان متساويان

[٢] الطرف الأيمن $= \frac{\text{حـ}^{٢}\text{م}^{٤} + \text{حـ}^{٢}\text{م}^{٢}}{\text{حـ}^{٢}\text{م}^{٢} + \text{حـ}^{٢}} = \frac{\text{حـ}^{٢}\text{م}^{٢}\,(\text{م}^{٢} + ١)}{\text{حـ}^{٢}\,(\text{م}^{٢} + ١)} = \text{م}^{٢}$ (١)

الطرف الأيسر $= \frac{\text{حـ م}^{٢}}{\text{حـ}} = \text{م}^{٢}$ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الطرفان متساويان

(١٨) نفرض أن : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{حـ}} = \text{م}$

∴ $\text{ب} = \text{حـ م}$ ، $\text{أ} = \text{حـ م}^{٢}$

[١] الطرف الأيمن $= \frac{\text{حـ}^{٣}\text{م}^{٦} + \text{حـ}^{٣}\text{م}^{٣}}{\text{حـ}^{٣}\text{م}^{٣} + \text{حـ}^{٣}} = \frac{\text{حـ}^{٣}\text{م}^{٣}\,(\text{م}^{٣} + ١)}{\text{حـ}^{٣}\,(\text{م}^{٣} + ١)} = \text{م}^{٣}$ (١)

الطرف الأيسر $= \frac{\text{حـ}^{٢}\text{م}^{٤}}{\text{حـ}^{٢}\text{م}} = \text{م}^{٣}$ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الطرفان متساويان

[٢] الطرف الأيمن $= \frac{\text{حـ}^{٢}\text{م}^{٤} + \text{حـ}^{٢}\text{م}^{٣} + \text{حـ}^{٢}\text{م}^{٢}}{\text{حـ}^{٢}\text{م}^{٢} + + \text{حـ}^{٢}\text{م} + \text{حـ}^{٢}} =$

$= \frac{\text{حـ}^{٢}\text{م}^{٢}\,(\text{م}^{٢} + \text{م} + ١)}{\text{حـ}^{٢}\,(\text{م}^{٢} + \text{م} + ١)} = \text{م}^{٢}$ (١)

الطرف الأيسر $= \frac{\text{حـ م}^{٢}}{\text{حـ}} = \text{م}^{٢}$ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الطرفان متساويان

(١٩) نفرض أن : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{حـ}} = \frac{\text{حـ}}{\text{ء}} = \text{م}$

∴ $\text{حـ} = \text{ء م}$ ، $\text{ب} = \text{ء م}^{٢}$ ، $\text{أ} = \text{ء م}^{٣}$

[١] الطرف الأيمن $= \frac{\text{ء}^{٢}\text{م}^{٦} - ٢\,\text{ء}^{٢}\text{م}^{٢}}{\text{ء}^{٢}\text{م}^{٤} - ٢\,\text{ء}^{٢}} = \frac{\text{ء}^{٢}\text{م}^{٢}\,(\text{م}^{٤} - ٢)}{\text{ء}^{٢}\,(\text{م}^{٤} - ٢)} = \text{م}^{٢}$ (١)

الطرف الأيسر $= \frac{\text{ء م}^{٢}}{\text{ء}} = \text{م}^{٢}$ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الطرفان متساويان

[٢] الطرف الأيمن $= \frac{\text{ء}^{٢}\text{م}^{٢} - \text{ء}^{٢}}{\text{ء}^{٢}\text{م}^{٣} - \text{ء م}} = \frac{\text{ء}^{٢}\,(\text{م}^{٢} - ١)}{\text{ء}^{٢}\text{م}\,(\text{م}^{٢} - ١)} = \frac{\text{ع}}{\text{م}}$ (١)

الطرف الأيسر $= \frac{\text{ء}^{٢}\text{م}^{٢}}{\text{ء م}^{٢}} = \frac{\text{ع}}{\text{م}}$ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الطرفان متساويان

(٢٠) نفرض أن : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{حـ}} = \frac{\text{حـ}}{\text{ء}} = \text{م}$

∴ حـ = ء م ، ب = ء $\text{م}^{٢}$ ، أ = ء $\text{م}^{٣}$

[١] الطرف الأيمن = $\frac{\text{ء م}^{٣}}{\text{ء م}^{٢} + \text{ء م}} = \frac{\text{ء م}^{٣}}{\text{ء}(\text{م}^{٢} + ١)} = \frac{\text{م}^{٢}}{\text{م}^{٢} + ١}$ (١)

الطرف الأيسر = $\frac{\text{ء}^{٢}\text{م}^{٢}}{\text{ء}^{٢}\text{م}^{٢} + \text{ء}^{٣}} = \frac{\text{ء}^{٢}\text{م}^{٢}}{\text{ء}^{٢}(\text{م}^{٢} + ١)} = \frac{\text{م}^{٢}}{\text{م}^{٢} + ١}$ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الطرفان متساويان

[٢] الطرف الأيمن = $\frac{\text{ء}^{٢}\text{م}^{٥} - \text{ء}^{٢}\text{م}}{\text{ء}^{٢}\text{م}^{٤} - \text{ء}^{٢}\text{م}^{٢}} = \frac{\text{ء}^{٢}\text{م}(\text{م}^{٤} - ١)}{\text{ء}^{٢}\text{م}^{٢}(\text{م}^{٢} - ١)}$

$= \frac{(\text{م}^{٢} + ١)(\text{م}^{٢} - ١)}{\text{م}(\text{م}^{٢} - ١)} = \frac{\text{م}^{٢} + ١}{\text{م}}$ (١)

الطرف الأيسر = $\frac{\text{ء م}^{٣} + \text{ء م}}{\text{ء م}^{٢}} = \frac{\text{ء م}(\text{م}^{٢} + ١)}{\text{ء م}^{٢}} = \frac{\text{م}^{٢} + ١}{\text{م}}$ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الطرفان متساويان

(٢١) ∴ ٣ ، ل ، ١٢ ، م ∴ $\text{ل}^{٢}$ = ٣٦ ∴ ل = ± ٦

، ل م = ١٤٤ بالتعويض عن قيمة ل ينتج : م = ± ٢٤

(٢٢) نفرض أن : $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{\text{ع}}{\text{ل}} = \text{م}$ ∴ ص = ع م ، س = ع $\text{م}^{٢}$

، ∵ س + ص = ١٢ ∴ ع م + ع $\text{م}^{٢}$ = ١٢ (١)

، ∵ ص + ع = ١٨ ∴ ع م + ع = ١٨ (٢)

بقسمة (١) ÷ (٢) ينتج : م = $\frac{٢}{٣}$

∴ س : ص = ع $\text{م}^{٢}$: ع م = م : ١ = $\frac{٢}{٣}$: ١ = ٢ : ٣

(٢٣) [١] $\frac{٣}{٥}$ [٢] ١٦   [٣] ٣   [٤] ± ٤   [٥] $\frac{٤}{٩}$ [٦] $\frac{٥}{٦}$ [٧] ٣ : ٥

[٨] ٥   [٩] ١١   [١٠] ٨   [١١] $\frac{٦}{٣٥}$ [١٢] − ١٦   [١٣] ١٨

[١٤] ٤٠   [١٥] ٣   [١٦] ٢٨   [١٧] ٧   [١٨] ٣

الدرس الثالث : التغير الطردى و التغير العكسى

(١) ∵ ص ∝ س ∴ ص = م س حيث : م ثابت ≠ ٠

، ∵ ص = ١٤ عندما س = ٧

∴ ١٤ = م × ٧ ∴ م = ٢

∴ العلاقة بين ص ، س هى : ص = ٢ س

، عندما ص = ٢٠ ∴ ٢٠ = ٢ س و منها : س = ١٠

(٢) ∵ ص ∝ س ∴ ص = م س حيث : م ثابت ≠ ٠

، ∵ ص = ١٤ عندما س = ٤٢

∴ ١٤ = م × ٤٢ ∴ م = $\frac{١}{٣}$ ∴ ص = $\frac{١}{٣}$ س

، عندما س = ٦٠ ∴ ص = $\frac{١}{٣}$ × ٦٠ = ٢٠

(٣) ∵ أ ∝ ب ∴ أ = م ب حيث : م ثابت ≠ ٠

، ∵ أ = ٤ عندما ب = ١٢

∴ ٤ = م × ١٢ ∴ م = $\frac{١}{٣}$ ∴ أ = $\frac{١}{٣}$ ب

، عندما ب = ٣٦ ∴ أ = $\frac{١}{٣}$ × ٣٦ = ١٢

(٤) ∵ ف ∝ ن ∴ $\frac{\text{ف}_{١}}{\text{ف}_{٢}} = \frac{\text{ن}_{١}}{\text{ن}_{٢}}$

أحمد الشتورى

∵ ف_1 = ١٥٠ ، ن_1 = ٦ ، ن_2 = ١٠

∴ بالتعويض ينتج : ف_2 = ٢٥٠ كم

(٥) ∵ و ∝ م ∴ $\frac{\text{و}_1}{\text{و}_2} = \frac{\text{م}_1}{\text{م}_2}$

∵ و_1 = ١٨٢ ، م_1 = ٣٥ ، و_2 = ٣١٢

∴ بالتعويض ينتج : م_2 = ٦٠ كجم

(٦) ∵ $\frac{\text{أ} + \text{ب}}{٣} = \frac{٢\text{ب} + \text{جـ}}{٦}$ ∴ ٦أ + ٦ب = ٦ب + ٣جـ

ومنها : جـ = ٢أ ∴ جـ ∝ أ

(٧) ∵ ص = أ + ٤ ، أ ∝ س ∴ أ = م س

∴ ص = م س + ٤ ، ∵ ص = ١٩ عندما س = ٥

∴ ١٩ = م × ٥ + ٤ و منها : م = ٣

∴ ص = ٣س + ٤

، عندما س = ٢ ∴ ص = ٣ × ٢ + ٢ = ٨

(٨) ∵ ص = أ + ب ، ب ∝ س ∴ ب = م س

∴ ص = أ + م س ، ∵ ص = ٢ عندما س = ٠

∴ ٢ = أ + م × ٠ و منها : أ = ٢

، ∵ ص = ٨ عندما س = ٣

∴ ٨ = ٢ + م × ٣ و منها : م = ٢

∴ ص = ٢ + ٢س

، عندما س = ٥ ∴ ص = ٢ + ٢ × ٥ = ١٢

(٩) ∵ ٢٥ س^2 − ٢٠ س ص + ٤ ص^2 = ٠

∴ $(\text{٥ س} - \text{٢ ص})^2$ = ٠ ∴ س = $\frac{٢}{٥}$ ص ∴ ص ∝ س

(١٠) ∵ ص ∝ $\frac{١}{\text{س}}$ ∴ ص = $\frac{\text{م}}{\text{س}}$ حيث : م ثابت ≠ ٠

، ∵ ص = ١٠ عندما س = ٣

∴ ١٠ = $\frac{\text{م}}{٣}$ و منها : م = ٣٠ ∴ ص = $\frac{٣٠}{\text{س}}$

، عندما س = ٥ فإن : ص = $\frac{٣٠}{٥}$ = ٦

(١١) ∵ ص ∝ $\frac{١}{\text{س}}$ ∴ ص = $\frac{\text{م}}{\text{س}}$ حيث : م ثابت ≠ ٠

، ∵ ص = ٩ عندما س = ٤

∴ ٩ = $\frac{\text{م}}{٤}$ و منها : م = ٣٦ ∴ ص = $\frac{٣٦}{\text{س}}$

، عندما س = ١٢ فإن : ص = $\frac{٣٦}{١٢}$ = ٣

(١٢) ∵ $\text{س}^2 \text{ص}^2$ − ١٤ س ص + ٤٩ = ٠

∴ $(\text{س ص} - ٧)^2$ = ٠ ∴ س ص = ٧

∴ ص تتغير عكسياً مع س

(١٣) ∵ ع ∝ $\frac{١}{\text{نق}^2}$ ∴ $\frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2} = \frac{\text{نق}_1^2}{\text{نق}_2^2}$

∵ ع_1 = ٥ ، نق_1 = ٣ ، نق_1 = ٢,٥

∴ بالتعويض ينتج : ع_2 = ٧,٢ سم / ث

(١٤) ∵ ن ∝ $\frac{١}{\text{س}}$ ∴ $\frac{\text{ن}_1}{\text{ن}_2} = \frac{\text{س}_2}{\text{س}_1}$ ∴ $\frac{٤}{\text{ن}_2} = \frac{٨}{٦}$

∴ ن_2 = ٣

(١٥) [١] ∵ $\frac{٣}{٦} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$ نوع التغير ص ، س عكسى

[٢] ∵ ص ∝ $\frac{١}{س}$ ∴ ص = $\frac{م}{س}$ ، ∵ ص = ٦

عندما س = ٢ ∴ م (ثابت التناسب) = ١٢

∴ ص = $\frac{١٢}{س}$

[٣] ص = $\frac{١٢}{٣}$ = ٣ ساعات

[٤] ١٢ = $\frac{١٢}{س}$ و منها : س = ١

(١٦) [١] ∵ $\frac{٧٢}{٤٨} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$ ∴ نوع التغير ص ، س طردى

[٢] ∵ ص ∝ س ∴ ص = م س ، ∵ ص = ١٢

عندما س = ١ ∴ م (ثابت التناسب) = ١٢

∴ ص = ١٢ س

[٣] ص = ١٢ × ٢ = ٢٤

[٤] ٣٦ = ١٢ س و منها : س = ٣

(١٧) ∵ ع ∝ $\frac{١}{ص}$ ∴ ع = $\frac{م}{ص}$ ، ∵ ع = ٢ عندما ص = ٣

∴ بالتعويض ينتج : م = ٦ ∴ ع = $\frac{٦}{ص}$

، ∵ س = ع + ٨ ∴ س = $\frac{٦}{ص}$ + ٨

، عندما ص = ٣ ∴ س = ١٠

(١٨) ∵ أ ∝ $\frac{١}{س^٢}$ ∴ أ = $\frac{م}{س^٢}$ ، ∵ أ = ١٨ عندما س = $\frac{٢}{٣}$

∴ بالتعويض ينتج : م = ٨ ∴ أ = $\frac{٨}{س^٢}$

، ∵ ص = أ + ٧ ∴ ص = $\frac{٨}{س^٢}$ + ٧

، عندما س = ٢ ∴ ص = ٩

(١٩) ∵ ص = أ − ٢ ، أ ∝ $\frac{١}{س^٢}$ ∴ أ = $\frac{م}{س^٢}$

∴ ص = $\frac{م}{س^٢}$ − ٢

، ∵ ص = ١٤ عندما س = ١ ∴ بالتعويض ينتج : م = ١٦

∴ ص = $\frac{١٦}{س^٢}$ − ٢ ، بالضرب × $س^٢$ ينتج :

$س^٢$ ص = ١٦ − ٢ $س^٢$ ، عندما س = ٢ ∴ ص = ٢

(٢٠) ∵ ص = أ − ٩ ، ص ∝ $\frac{١}{س^٢}$ ∴ ص = $\frac{م}{س^٢}$

∴ $\frac{م}{س^٢}$ = أ − ٩ ، ∵ أ = ١٨ عندما س = $\frac{٢}{٣}$

∴ بالتعويض ينتج : م = ٤ ∴ ص = $\frac{٤}{س^٢}$

، عندما س = ١ ∴ ص = ٤

(٢١) [١] $\frac{س}{٥} = \frac{ص}{٣}$ [٢] س ص = ٧ [٣] ٢

[٤] ص = أ + م س حيث : م ثابت ≠ ٠ [٥] (٤)

[٦] $\frac{١}{س}$ [٧] س [٨] ٣ [٩] ٤ [١٠] $\frac{١}{س}$ [١١] $\frac{١}{س}$

الوحدة الثانية　　الإحصاء

الدرس الأول : جمع البيانات

(١) ∵ عدد التلاميذ بالمدرسة = ٣٣٠ عامل

∴ عدد العينة العشوائية = $\frac{١٠}{١٠٠}$ × ٣٣٠ = ٣٣ عاملاً

يتم استخدام الآلة الحاسبة فى انتاج أرقام عشوائية فى النطاق من

٠,٠٠١ إلى ٠,٣٣٠ ليصبح النطاق من ١ إلى ٣٣٠

(٢) ∵ عدد العاملين بالمصنع = ٢٠٠ عامل

∴ عدد العينة العشوائية = $\frac{١٠}{١٠٠}$ × ٢٠٠ = ٢٠ عاملاً

يتم استخدام الآلة الحاسبة فى انتاج أرقام عشوائية فى النطاق من ٠,٠٠١ إلى ٠,٢٠٠ ليصبح النطاق من ١ إلى ٢٠٠

(٣) ∵ عدد النزلاء بالفندق = ٣٠٠ عامل

∴ عدد العينة العشوائية = $\frac{١٠}{١٠٠}$ × ٣٠٠ = ٣٠ عاملاً

يتم استخدام الآلة الحاسبة فى انتاج أرقام عشوائية فى النطاق من ٠,٢٠١ إلى ٠,٥٠٠ ليصبح النطاق من ٢٠١ إلى ٥٠٠

(٤) العدد الكلى للطلاب بالمدرسة = ٨٤٠ عامل

عدد مفردات الطبقة الأولى = $\frac{٣٦٠}{٨٤٠}$ × ٣٥ = ١٥ طالباً

عدد مفردات الطبقة الثانية = $\frac{٤٨٠}{٨٤٠}$ × ٣٥ = ٢٠ طالبة

(٥) العدد الكلى للعاملين بالمصنع = ٢٥٠ عامل

عدد مفردات الطبقة الأولى = $\frac{١٢٥}{٢٥٠}$ × ٥٠ = ٢٥ عاملاً

عدد مفردات الطبقة الثانية = $\frac{٧٥}{٢٥٠}$ × ٥٠ = ١٥ فنياً

عدد مفردات الطبقة الثالثة = $\frac{٥٠}{٢٥٠}$ × ٥٠ = ١٠ مهندساً

(٦) عدد مفردات الطبقة الثانية = ٥٠٠٠ − ١٥٠٠ = ٣٥٠٠ مفردة

عدد المفردات الكلية للعينة = $\frac{٥٠٠٠}{٣٥٠٠}$ × ١٤٠ = ٢٠٠ مفردة

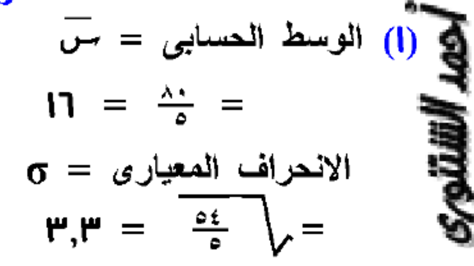
(٧) حجم العينة كلها = $\frac{٤٠٠٠٠}{١٢٠٠٠}$ × ٢٤٠ = ٨٠٠ مفردة

(٨) حجم العينة كلها = $\frac{٦٠٠٠٠}{٢٠٠٠٠}$ × ٤٠٠ = ١٢٠٠ مفردة

(٩)

رقم الطبقة	١	٢	٣	٤	الإجمالى
عدد مفردات الطبقة	٥٠٠	٧٠٠	٣٥٠	٤٥٠	٢٠٠٠
عدد المفردات التى تمثل الطبقة فى العينة	١٠	١٤	٧	٩	٤٠

الدرس الثانى : التشتت



(١) الوسط الحسابى = $\overline{س}$

= $\frac{٨٠}{٥}$ = ١٦

الانحراف المعيارى = σ

= $\sqrt{\frac{٥٤}{٥}}$ = ٣,٣

س	س − $\overline{س}$	(س − $\overline{س}$)^٢
١٢	− ٤	١٦
١٣	− ٣	٩
١٦	٠	٠
١٨	٢	٤
٢١	٣	٩
٨٠	المجموع	٥٤

(٢) كون الجدول بنفسك ، $\overline{س}$ = ١٦ ، مجـ (س − $\overline{س}$)^٢ = ٤٣٤

، σ = ٩,٣

(٣) كون الجدول بنفسك ، $\overline{س}$ = ٣١ ، مجـ (س − $\overline{س}$)^٢ = ٢٢

، σ = ٢,٣

(٤) كون الجدول بنفسك ، $\overline{س}$ = ٣ ، مجـ (س − $\overline{س}$)^٢ = ١١٠

، σ = ١٥,٣

(٥) كون الجداول بنفسك ،

بالنسبة للمجموعة (ﻫ) : س̄ = ٦٨ ، مجـ (س – س̄)^٢ = ١٥٠

، σ = ٤,٦٣

، بالنسبة للمجموعة (ب) : س̄ = ٦٨ ، مجـ (س – س̄)^٢ = ٢٩٤٨

، σ = ٢٠,٦٥ ∴ المجموعة ﻫ أكثر تجانساً من المجموعة ب

(٦) كون الجداول بنفسك ،

بالنسبة لدرجة الحرارة العظمى : س̄ = ٢٥ ،

مجـ (س – س̄)^٢ = ١٨ ، σ = ١,٥

، بالنسبة لدرجة الحرارة الصغرى : س̄ = ٣١ ،

مجـ (س – س̄)^٢ = ١١ ، σ = ٣,٢

(٧) نعتبر عدد الأهداف : س ، و عدد المباريات : ك

س	ك	س × ك	س – س̄	(س – س̄)^٢	(س – س̄)^٢ × ك
٠	١	٠	٣–	٩	٩
١	٤	٤	٤	١	١٦
٢	٦	١٢	١–	١	٦
٣	٩	٢٧	٠	٠	٠
٤	٥	٢٠	١	١	٥
٥	٣	١٥	٢	٤	١٢
٦	٢	١٢	٣	٩	١٨
مجـ	٣٠	٩٠	أحمد الشتتورى		٦٦

الوسط الحسابى = س̄ = ٩٠/٣٠ = ٣

الانحراف المعيارى = σ = √(٦٦/٣٠) = ١,٤٨

(٨) نعتبر عدد الوحدات التالفة : س ، و عدد الصناديق : ك

كون الجداول بنفسك ، مجـ ك = ١٠٠ ، مجـ س ك = ٣٠٠

، س̄ = ٣ وحدات ، مجـ (س – س̄)^٢ × ك = ٢٠٤ ، σ = ١,٤

(٩) نعتبر العمر بالسنوات : س ، و عدد الأطفال : ك

كون الجداول بنفسك ، مجـ ك = ١٠ ، مجـ س ك = ٩٠

، س̄ = ٩ وحدات ، مجـ (س – س̄)^٢ × ك = ٣٠ ، σ = ١,٧

(١٠)

المجموعات	ك	س	س × ك	س – س̄	(س – س̄)^٢	(س – س̄)^٢ × ك
٠ –	٣	٢	٦	٩,٦ –	٩٢,١٦	٢٧٦,٤٨
٤ –	٤	٦	٢٤	٥,٦ –	٣١,٣٦	١٢٥,٤٤
٨ –	٧	١٠	٧٠	١,٦ –	٢,٥٦	١٧,٩٢
١٢ –	٢	١٤	٢٨	٢,٤	٥,٧٦	١١,٥٢
١٦ –	٩	١٨	١٦٢	٦,٤	٤٠,٩٦	٣٦٨,٦٤
مجـ	٢٥		٢٩٠	أحمد الشتتورى		٨٠٠

الوسط الحسابى = س̄ = ٢٩٠/٢٥ = ١١,٦

الانحراف المعيارى = σ = √(٨٠٠/٢٥) = ٥,٧

(١١) نعتبر الدرجات : س

س	س − $\bar{س}$	(س − $\bar{س}$)^٢
٣٦	−٥	٢٥
٤٠	−١	١
٤٢	١	١
٣٨	−٣	٩
٤٦	٥	٢٥
٤٤	٣	٩
٢٤٦	المجموع	٧٠

الوسط الحسابى = $\bar{س}$

= ٤١

الانحراف المعيارى = σ

= $\sqrt{\frac{٧٠}{٦}}$ = ٣,٤٢

(١٢) [١] الطبقية [٢] المدى [٣] ٢ [٤] ٦ [٥] ٩ [٦] الانحراف المعيارى

[٧] ٣٩ [٨] σ = ٠ [٩] المدى

[١٠] جميع المفردات تكون متساوية فى القيمة

[١١] أسلوب العينات [١٢] المتحيزة [١٣] ٣٠

[١٤] { ٢٥ ، ٣٩ ، ١٩ ، ٥ ، ٢٧ } لأن مدها الأكبر

الوحدة الرابعة حساب المثلثات

الدرس الأول : النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

(١) [١] ٤١,٣° [٢] ٨٥,٦٣٥٦°

(٢) [١] ٢٩° ٣٦′ [٢] ٥٧° ١٤′ ٤٦″

(٣) ∵ Δ أ ب حـ فيه : ق (∠ ب) = ٩٠° ،

أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم

[١] (أ حـ)^٢ = ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠ ∴ أ حـ = ١٠ سم

[٢] طا أ = $\frac{٨}{٦}$ = $\frac{٤}{٣}$ ، طا حـ = $\frac{٦}{٨}$ = $\frac{٣}{٤}$

[٣] حا أ حتا حـ + حتا أ حا حـ = $\frac{٨}{١٠}$ × $\frac{٨}{١٠}$ + $\frac{٦}{١٠}$ × $\frac{٦}{١٠}$

$\frac{٦٤}{١٠٠}$ + $\frac{٣٦}{١٠٠}$ = ١

[٤] حتا^٢ أ + حا^٢ أ = ($\frac{٦}{١٠}$)^٢ + ($\frac{٨}{١٠}$)^٢ = $\frac{٣٦}{١٠٠}$ + $\frac{٦٤}{١٠٠}$ = ١

(٤) ∵ Δ س ص ع فيه : ق (∠ ص) = ٩٠° ،

س ع = ٢٥ سم ، س ص = ٢٤ سم

[١] (ع ص)^٢ = ٦٢٥ − ٥٧٦ = ٤٩ ∴ ع ص = ٧ سم

[٢] حا ع = $\frac{٢٤}{٢٥}$ ، حتا س = $\frac{٢٤}{٢٥}$

[٣] حتاع حتا س − حا ع حا س = $\frac{٧}{٢٥}$ × $\frac{٢٤}{٢٥}$ − $\frac{٢٤}{٢٥}$ × $\frac{٧}{٢٥}$ = ٠

[٤] ١ − طا^٢ ع = ١ − ($\frac{٢٤}{٧}$)^٢ = ١ − $\frac{٥٧٦}{٤٩}$ = − $\frac{٥٢٧}{٤٩}$

(٥) ∵ Δ أ ب حـ فيه : أ ب = أ حـ ، $\overline{أ ء}$ ⊥ $\overline{ب حـ}$

∴ ب ء = حـ ء = $\frac{١}{٢}$ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ سم = ٦ سم

، ∵ Δ أ ء حـ فيه القائم الزاوية فى ء

∴ (أ ء)^٢ = ١٠٠ − ٣٦ = ٦٤ ∴ أ ء = ٨ سم

[١] حا ب + حا حـ = $\frac{٨}{١٠}$ + $\frac{٨}{١٠}$ = $\frac{١٦}{١٠}$ > ١

[٢] حتا^٢ حـ + حا^٢ حـ = ($\frac{٦}{١٠}$)^٢ + ($\frac{٨}{١٠}$)^٢ = $\frac{٣٦}{١٠٠}$ + $\frac{٦٤}{١٠٠}$

= $\frac{١٠٠}{١٠٠}$ = ١

(٦) ∵ Δ أ ء حـ فيه القائم الزاوية فى ء

∴ $(\text{أ ء})^2 = ٢٢٥ - ٨١ = ١٤٤$ ∴ أ ء = ١٢ سم

، ∵ Δ أ ء ب فيه القائم الزاوية فى ء

∴ $(\text{ب ء})^2 = ١٦٩ - ١٤٤ = ٢٥$ ∴ ب ء = ٥ سم

∴ المقدار $= \dfrac{\frac{١٢}{٩} + \frac{١٢}{٥}}{\frac{١٢}{٩} - \frac{١٢}{٥}} = -\dfrac{٧}{٢}$

(٧) نرسم $\overline{\text{أ هـ}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{ء و}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$

، $\overline{\text{أ ء}} \parallel \overline{\text{ب حـ}}$ ∴ أ هـ و ء مستطيل

∴ أ هـ = ء و

، و هـ = أ ء = ٤ سم ، ∵ أ ب = ء حـ = ٥ سم

∴ Δ أ ب هـ ≡ Δ ء حـ و ، ينتج أن : ب هـ = حـ و

، ∵ ب هـ + حـ و = ب حـ − هـ و = ١٢ − ٤ = ٨ سم

∴ ب هـ = حـ و = ٤ سم

∴ Δ أ ب هـ : أ هـ = ٣ سم (فيثاغورث) ∴ ء و = ٣ سم

∴ المقدار $= \dfrac{٥ \times \frac{٣}{٤} \times \frac{٤}{٥}}{(\frac{٣}{٤})^2 + (\frac{٤}{٥})^2} = ٣$

(٨) من Δ أ ب حـ : ظا حـ $= \dfrac{\text{أ ب}}{\text{ب حـ}} = \dfrac{٩}{\text{ب حـ}}$

، من Δ ء هـ حـ : ظا حـ $= \dfrac{\text{ء هـ}}{\text{هـ حـ}} = \dfrac{٣}{٤}$

∴ $\dfrac{٩}{\text{ب حـ}} = \dfrac{٣}{٤}$ و منها : ب حـ = ١٢ سم

∴ ب هـ = ب حـ − هـ حـ = ١٢ − ٤ = ٨ سم

، مساحة Δ أ ب حـ $= \frac{١}{٢}$ ب حـ × أ ب $= \frac{١}{٢} \times ١٢ \times ٩$

$= ٥٤$ سم^2

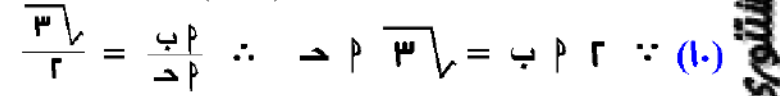
(٩) ∵ Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب

∴ حا أ $= \dfrac{\text{ب حـ}}{\text{أ حـ}}$ ، حا حـ $= \dfrac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}}$

∴ $\text{حا}^2 \text{أ} + \text{حا}^2 \text{حـ} =$

$(\dfrac{\text{ب حـ}}{\text{أ حـ}})^2 + (\dfrac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}})^2 = \dfrac{(\text{ب حـ})^2}{(\text{أ حـ})^2} + \dfrac{(\text{أ ب})^2}{(\text{أ حـ})^2} =$

$\dfrac{(\text{ب حـ})^2 + (\text{أ ب})^2}{(\text{أ حـ})^2} = \dfrac{(\text{أ حـ})^2}{(\text{أ حـ})^2} = ١$



(١٠) ∵ ٢ أ ب = $\sqrt{٣}$ أ حـ ∴ $\dfrac{\text{أ ب}}{\text{أ حـ}} = \dfrac{\sqrt{٣}}{٢}$

، بفرض أن : أ ب = $\sqrt{٣}$ وحدات طول

، أ حـ = ٢ وحدات طول

∴ ب حـ = ١ وحدات طول (فيثاغورث)

∴ حا حـ $= \dfrac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، حتا حـ $= \dfrac{١}{٢}$ ، ظا حـ $= \sqrt{٣}$

(١١) ∵ حا أ $= \dfrac{١٥}{١٧}$ ∴ بفرض أن : ب حـ = ١٥ وحدات طول

، أ حـ = ١٧ وحدات طول

∴ أ ب = ٨ وحدات طول (فيثاغورث)

∴ ٢ حا أ حتا أ $= ٢ \times \dfrac{١٥}{١٧} \times \dfrac{٨}{١٧}$

$= \dfrac{٢٤٠}{٢٨٩}$

(١٢) ∵ ٤ طا أ − ٣ = ٠ ∴ طا أ = $\frac{٣}{٤}$

، بفرض أن : ب حـ = ٣ وحدات طول

، أ ب = ٤ وحدات طول

∴ أ حـ = ٥ وحدات طول (فيثاغورث)

∴ الطرف الأيمن = حتا² أ − حا² أ = $\left(\frac{٤}{٥}\right)^{٢} - \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢}$

$= \frac{١٦}{٢٥} - \frac{٩}{٢٥} = \frac{٧}{٢٥}$　　(١)

، الطرف الأيسر = ٢ حتا² أ − ١ = $٢ \times \left(\frac{٤}{٥}\right)^{٢} - ١$

$= ٢ \times \frac{١٦}{٢٥} - ١ = \frac{٣٢}{٢٥} - ١ = \frac{٧}{٢٥}$　　(٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : الطرفان متساويان

الدرس الثانى : النسب المثلثية الأساسية لبعض الزوايا

(١) [١] $١ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

[٢] $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢} + \left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢} = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} = ١$

[٣] $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} + \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢} = \frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤} = ١$

[٤] $\frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} - \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢} = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} - \frac{٣}{٤} = ٠$

[٥] $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}\right)\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢}\right) = \frac{٣}{٤} - \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢}$

(٢) بالتعويض عن النسب المثلثية للزوايا كما سبق ينتج :

[١] الطرف الأيمن = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

الطرف الأيسر = $٢ \times \frac{١}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ الطرفان متساويان

[٢] الطرف الأيمن = $\frac{١}{٢}$

الطرف الأيسر = $٢ \times \frac{٣}{٤} - ١ = \frac{١}{٢}$ ∴ الطرفان متساويان

[٣] الطرف الأيمن = $\frac{١}{٢}$

الطرف الأيسر = $\frac{٣}{٤} - \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢}$ ∴ الطرفان متساويان

[٤] الطرف الأيمن = $٢ \times \frac{١}{٢} - ١ = ٠$

الطرف الأيسر = $١ - ٢ \times \frac{١}{٢} = ٠$ ∴ الطرفان متساويان

[٥] $\dfrac{\frac{١}{٢\sqrt{٢}} + \frac{\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}}}{\frac{١}{٢\sqrt{٢}} + \frac{\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}}} = ١$

الطرف الأيسر = ١ ∴ الطرفان متساويان

(٣) بالتعويض عن النسب المثلثية للزوايا كما سبق ينتج :

[١] حا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ س = ٦٠°

[٢] طا س = ١ ∴ س = ٤٥°

[٣] حا س = $\frac{١}{٢}$ ∴ س = ٣٠°

[٤] ٢ حا س = ١ ∴ حا س = ١/٢ ∴ س = ٣٠°

[٥] ١/٢ − طا س = − ١/٢ ∴ طا س ١ ∴ س = ٤٥°

(٤) بالتعويض عن النسب المثلثية للزوايا كما سبق ينتج :

[١] ٤ س = ٣/٤ × ١/٢ × ١ و منها : س = ١/١٦

[٢] س × ١/٢ = ٣/٤ + ١/٤ و منها : س = ٢

[٣] س × ١/٢ × ١/٢ = ٣/٤ × ١ و منها : س = ٣

[٤] س × √٣ / ٢ = ١ − ١/٤ و منها : س = √٣ / ٢

(٥) [١] ٣٣° ٤٥′ [٢] ١١٢° ٣٠′ [٣] ٣٠ [٤] ٦٠ [٥] ٣٠

[٦] ٢٠ [٧] ٥٠ [٨] ٦ [٩] ١/٢ [١٠] حا ٦٠° [١١] ١/٢

[١٢] ٢ √٣ [١٣] ٢ حا أ [١٤] ١٦/٢٥ [١٥] ٣١/٢٥ [١٦] ١٩/١٣

[١٧] صفر [١٨] ١/١٧ [١٩] <

(٦) ∵ Δ أ ب حـ فيه : أ ب = أ حـ ، أ ء ⊥ ب حـ

∴ ب ء = حـ ء = ١/٢ ب حـ = ٦ سم

من Δ أ ب ء يكون : حتا ب = ٦/٨ = ٠,٧٥

∴ ق (∠ ب) = ٤١° ٢٤′ ٣٥′ ، حا ب = أ ء / ٨

∴ أ ء = ٨ × حا ٣٥′ ٢٤′ ٤١° = ٥,٣ سم

(٧) من Δ أ ب حـ القائم الزاوية فى ب يكون : حا (∠ أ حـ ب) = ١٥/٢٥

∴ ق (∠ أ حـ ب) = ٣٦° ٥٢′ ١٢′

، ب حـ = ٢٠ سم (فيثاغورث)

، مساحة المستطيل أ ب حـ ء = ٢٠ × ١٥ = ٣٠٠ سم

(٨) من Δ أ ب حـ القائم الزاوية فى ب يكون : حتا ٢٥° = ب حـ / ٢٤

∴ ب حـ = ٢٤ × حتا ٢٥° = ٢١,٨ سم

(٩) من Δ أ ب حـ يكون :

حا ٦٠° = أ حـ / ٦

∴ أ حـ = ٦ × حا ٦٠° = ٥,٢ سم

(١٠) ∵ مساحة متوازى الأضلاع = طول القاعدة × الارتفاع

∴ ب حـ = ٩٦/٨ = ١٢ سم ، ∵ ب هـ : هـ حـ = ١ : ٣

∴ ب هـ = ١/٤ ب حـ = ١/٤ × ١٢ = ٣ سم

من Δ أ ب هـ القئم الزاوية في هـ يكون : طا ب = ٨/٣

∴ ق (∠ ب) = ٣٨′ ٢٦′ ٦٩°

، حا ب = ٨ / أ ب ∴ أ ب = ٦ × ٨ / حا ٣٨′ ٢٦′ ٦٩° = ٨,٥ سم

(١١) ∵ أ ء // ب حـ ، أ هـ ⊥ ب حـ ، ء و ⊥ ب حـ

∴ أ هـ و ء مستطيل ∴ أ هـ = ء و

، و هـ = أ ء = ٥ سم ، ∵ أ ب = ء حـ = ٥ سم

∴ Δ أ ب هـ ≡ Δ ء حـ و ، ينتج أن : ب هـ = حـ و

، ∵ ب هـ + حـ و = ب حـ − هـ و = ١١ − ٥ = ٦ سم

∴ ب هـ = حـ و = ٣ سم ، من Δ أ ب هـ يكون : حتا ب = ٣/٥

∴ ق (∠ ب) = ٥٣° ٧َ ٤٩َ

، ق (∠ ب أ ء) = ١٨٠° − ٥٣° ٧َ ٤٩َ = ١٢٦° ٥٢َ ١١َ

من Δ أ ب هـ يكون : أ هـ = ٣ سم (فيثاغورث)

∴ مساحة شبه المنحرف أ ب حـ ء = ½ × (٥ + ١١) × ٤

= ٣٢ سم²

الوحدة الخامسة　　　الهندسة التحليلية

الدرس الأول : البعد بين نقطتين

(١) أ ب = √(٩ + ٤) = √١٣ وحدة طول

ب حـ = √(٣٦ + ١٦) = ٢√١٣ وحدة طول

أ حـ = √(٨١ + ٣٦) = ٣√١٣ وحدة طول

∴ أ حـ = أ ب + ب حـ　　∴ أ ، ب ، حـ على استقامة واحدة

(٢) أ ب = √(١ + ٤) = √٥ وحدة طول ، (أ ب)² = ٥

ب حـ = √(٢٥ + ٩) = √٣٤ وحدة طول ، (ب حـ)² = ٣٤

أ حـ = √(١٦ + ١) = √١٧ وحدة طول ، (أ حـ)² = ١٧

، ∵ (أ ب)² + (أ حـ)² < (ب حـ)²　∴ Δ أ ب حـ منفرج الزاوية

(٣) أ ب = √(٩ + ١٦) = ٥ وحدة طول ، (أ ب)² = ٢٥

ب حـ = √(١٦ + ٩) = ٥ وحدة طول ، (ب حـ)² = ٢٥

أ حـ = √(٤٩ + ١) = √٥٠ وحدة طول ، (أ حـ)² = ٥٠

، ∵ (أ ب)² + (ب حـ)² = (أ حـ)²

∴ Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب

، مساحة Δ أ ب حـ = ½ × ٥ × ٥ = ١٢,٥ وحدة مساحة

(٤) أ ب = √(٢٥ + ٢٥) = ٥√٢ وحدة طول

ب حـ = √(١ + ٣٦) = √٣٧ وحدة طول

أ حـ = √(٣٦ + ١) = √٣٧ وحدة طول

∵ ب حـ = أ حـ　∴ Δ أ ب حـ متساوى الساقين

(٥) أ ب = √(٤ + ١٦) = ٢√٥ وحدة طول ،

ب حـ = √(٦٤ + ١٦) = ٤√٥ وحدة طول ،

حـ ء = √(٤ + ١٦) = ٢√٥ وحدة طول ،

أ ء = √(٦٤ + ١٦) = ٤√٥ وحدة طول ،

أ حـ = √(٣٦ + ٦٤) = ١٠ وحدة طول ،

ب ء = √(١٠ + ٠) = ١٠ وحدة طول

، ∵ أ ب = حـ ء ، ب حـ = أ ء ، أ حـ = ب ء

∴ الشكل الرباعى أ ب حـ ء مستطيل

، مساحة المستطيل أ ب حـ ء = أ ب × ب حـ

= ٢√٥ × ٤√٥

= ٨٠ وحدة مساحة

(٦) أ ب = $\sqrt{١ + ١٦}$ = $\sqrt{١٧}$ وحدة طول ،

ب حـ = $\sqrt{٢٥ + ١}$ = $\sqrt{٢٦}$ وحدة طول ،

حـ ء = $\sqrt{١ + ١٦}$ = $\sqrt{١٧}$ وحدة طول ،

أ ء = $\sqrt{٢٥ + ١}$ = $\sqrt{٢٦}$ وحدة طول

، ∵ أ ب = حـ ء ، ب حـ = أ ء

∴ الشكل الرباعى أ ب حـ ء متوازى أضلاع

(٧) أ ب = $\sqrt{٢٥ + ١٦}$ = $\sqrt{٤١}$ وحدة طول ،

ب حـ = $\sqrt{١٦ + ٢٥}$ = $\sqrt{٤١}$ وحدة طول ،

حـ ء = $\sqrt{٢٥ + ١٦}$ = $\sqrt{٤١}$ وحدة طول ،

أ ء = $\sqrt{١٦ + ٢٥}$ = $\sqrt{٤١}$ وحدة طول ،

أ حـ = $\sqrt{٨١ + ١}$ = $\sqrt{٨٢}$ وحدة طول ،

ب ء = $\sqrt{١ + ٨١}$ = $\sqrt{٨٢}$ وحدة طول

∵ أ ب = ب حـ = حـ ء = أ ء ، أ حـ = ب ء

∴ الشكل الرباعى أ ب حـ ء مربع

، مساحة المستطيل أ ب حـ ء = $(أ ب)^2$ = $(\sqrt{٤١})^2$

= ٤١ وحدة مساحة

(٨) أ ب = $\sqrt{١ + ٢٥}$ = $\sqrt{٢٦}$ وحدة طول ،

ب حـ = $\sqrt{٢٥ + ١}$ = $\sqrt{٢٦}$ وحدة طول ،

حـ ء = $\sqrt{١ + ٢٥}$ = $\sqrt{٢٦}$ وحدة طول ،

أ ء = $\sqrt{٢٥ + ١}$ = $\sqrt{٢٦}$ وحدة طول ،

أ حـ = $\sqrt{١٦ + ١٦}$ = ٤ $\sqrt{٢}$ وحدة طول ،

ب ء = $\sqrt{٣٦ + ٣٦}$ = ٦ $\sqrt{٢}$ وحدة طول

∵ أ ب = ب حـ = حـ ء = أ ء ، أ حـ ≠ ب ء

∴ الشكل الرباعى أ ب حـ ء معين

، مساحة المستطيل أ ب حـ ء = $\frac{١}{٢}$ أ حـ × ب ء

= $\frac{١}{٢}$ × ٤ $\sqrt{٢}$ × ٦ $\sqrt{٢}$

= ٢٤ وحدة مساحة

(٩) م أ = $\sqrt{١٦ + ٩}$ = ٥ وحدة طول ،

م ب = $\sqrt{٩ + ١٦}$ = ٥ وحدة طول ،

م حـ = $\sqrt{٩ + ١٦}$ = ٥ وحدة طول

∵ م أ = م ب = م حـ ∴ أ ، ب ، حـ تقع على الدائرة م

، نق للدائرة = ٥ وحدة طول

∴ محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ × ٣,١٤ × ٥ = ٣١,٤ وحدة طول

(١٠) ∵ أ ب = ب حـ ∴ $(أ ب)^2$ = $(ب حـ)^2$

∴ $(س - ٣)^2$ + ١ = ٥ ∴ $(س - ٣)^2$ = ٤

∴ س − ٣ = ٢ و منها : س = ٥

أو س − ٣ = −٢ و منها : س = ١

(١١) [١] ١٣ [٢] ٥ [٣] ٣ [٤] ٤ [٥] ($\sqrt{٣}$ ، ١)

[٦] رؤوس مثلث قائم الزاوية [٧] قائم الزاوية و متساوى الساقين

[٨] صفر [٩] (٠ ، ٢) [١٠] ± ٣ [١١] ٣

الدرس الثانى : إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة

(١) [أ] ($\frac{٢+٦}{٢}$ ، $\frac{٤+٠}{٢}$) = (٤ ، ٢)

[٢] ($\frac{٧-١}{٢}$ ، $\frac{-٦+٠}{٢}$) = (٣ ، -٣)

(٢) [أ] ∵ (٤ ، ٦) = ($\frac{س+٦}{٢}$ ، $\frac{٣+ص}{٢}$)

∴ $\frac{س+٦}{٢}$ = ٤ ∴ س + ٦ = ٨ ∴ س = ٢

، $\frac{٣+ص}{٢}$ = ٦ ∴ ٣ + ص = ١٢ ∴ ص = ٩

[٢] ∵ (٦ ، -٤) = ($\frac{٥+س}{٢}$ ، $\frac{-٣+ص}{٢}$)

و منها : س = ٧ ، ص = -٥

[٣] كما سبق : س = -١٥ ، ص = -٨,٥

(٣) بفرض أن : ء منتصف $\overline{أب}$

∴ ء = ($\frac{١+٩}{٢}$ ، $\frac{-٦+٢}{٢}$) = (٥ ، -٢)

، بفرض أن : هـ منتصف $\overline{أء}$ يكون : هـ (٣ ، -٤)

، م منتصف $\overline{ب ء}$ يكون : م (٧ ، ٠)

(٤) بفرض أن : م نقطة تقاطع القطرين $\overline{أحـ}$ ، $\overline{ب ء}$

∴ م = ($\frac{-٣+١}{٢}$ ، $\frac{٤-٣}{٢}$) = (-١ ، $\frac{١}{٢}$)

، بفرض أن : ء (س ، ص)

∴ (-١ ، $\frac{١}{٢}$) = ($\frac{س+٥}{٢}$ ، $\frac{ص-٢}{٢}$)

و منها : س = -٧ ، ص = ٣ ∴ إحداثيي ء = (-٧ ، ٣)

(٥) بفرض أن : م نقطة تقاطع القطرين $\overline{أحـ}$ ، $\overline{ب ء}$

∴ م = ($\frac{٣-١}{٢}$ ، $\frac{٢-٢}{٢}$) = (١ ، ٠)

أحـ = $\sqrt{١٦+١٦}$ = ٤ $\sqrt{٢}$ وحدة طول

ب ء = $\sqrt{٣٦+٣٦}$ = ٦ $\sqrt{٢}$ وحدة طول

∴ مساحة المعين أ ب حـ ء = $\frac{١}{٢}$ أحـ × ب ء

= $\frac{١}{٢}$ × ٤ $\sqrt{٢}$ × ٦ $\sqrt{٢}$ = ٢٤ وحدة مربعة

(٦) أب = $\sqrt{١٦+١٦}$ = ٤ $\sqrt{٢}$ وحدة طول ، $(أب)^٢$ = ٣٢

ب حـ = $\sqrt{٣٦+٣٦}$ = ٦ $\sqrt{٢}$ وحدة طول ، $(ب حـ)^٢$ = ٧٢

أحـ = $\sqrt{١٠٠+٤}$ = ٢ $\sqrt{٢٦}$ وحدة طول ، $(أحـ)^٢$ = ١٠٤

∵ $(أب)^٢ + (ب حـ)^٢ = (أحـ)^٢$ ∴ Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب

، بفرض أن : م (س ، ص) منتصف $\overline{أحـ}$

∴ م = ($\frac{٦-٤}{٢}$ ، $\frac{٠+٢}{٢}$) = (١ ، ١)

، و ليكون الشكل أ ب حـ ء مستطيلاً

يجب أن تكون م (س ، ص) منتصف $\overline{ب ء}$

∴ (١ ، ١) = ($\frac{س+٢}{٢}$ ، $\frac{ص-٤}{٢}$)

و منها : س = ٠ ، ص = ٦ ∴ إحداثيي ء = (٠ ، ٦)

(٧) أب = $\sqrt{١٦+٩}$ = ٥ وحدة طول

ب حـ = $\sqrt{٦٤+٠}$ = ٨ وحدة طول

أ جـ = √(١٦ + ٩) = ٥ وحدة طول

بفرض أن : ء (س ، ص) منتصف ب جـ ∴ أ ء ⊥ ب جـ

، ء = ((٣ − ٥) / ٢ ، (١ + ١) / ٢) = (−١ ، ١)

، ∵ أ ء = √(٠ + ٩) = ٣ وحدة طول

∴ مساحة Δ أ ب جـ = ½ ب جـ × أ ء

= ½ × ٨ × ٣ = ١٢ وحدة مربعة

(٨) [١] (٤ ، −٢)   [٢] (١ ، ٩)   [٣] −٨   [٤] (٠ ، −١)

[٥] (٠ ، ٦)   [٦] (٣ ، ٢)   [٧] (٧ ، ٠)

الدرس الثالث : ميل الخط المستقيم

(١)

	[١]	[٢]	[٣]	[٤]	[٥]	[٦]
م	١ / √٣	√٣	١	−١	١,٤٨٦٠	١,٠٢٤٦
ق(∠هـ)	°٣٠	°٦٠	°٤٥	°١٣٥	°٥٦ ′٣ ″٤١	°٤٥ ′٤١ ″٤٧

(٢) ∵ م١ = −١ / (٢ − ك) ، م٢ = ١ ، ل١ // ل٢ ∴ م١ // م٢

∴ ٢ − ك = −١ و منها : ك = ٣

(٣) ∵ م١ = ك ، م٢ = √٣ ، ل١ // ل٢ ∴ م١ // م٢

∴ ك = √٣

(٤) م = (ك + ٣) / (−٤) ، ∵ ل // محور السينات ∴ م = ٠

∴ ك + ٣ = ٠ و منها : ك = −٣

(٥) م١ = ميل أب = ١ ، م٢ = ميل جـ ء = ١ / (ك + ٥)

، ∵ أب // جـ ء ∴ م١ // م٢

∴ ك + ٥ = ١ و منها : ك = −٤

(٦) ∵ م١ = −√٣ ، م٢ = ١ / √٣

، ∵ م١ × م٢ = −١ ∴ المستقيمان متعامدان

(٧) ∵ م١ = ١ − ك ، م٢ = ١ ، ∵ ل١ ⊥ ل٢

∴ م١ × م٢ = −١ ∴ (١ − ك) × ١ = −١

∴ ١ − ك = −١ و منها : ك = ٢

(٨) ميل المستقيم المعطى = −١ ،

بفرض أن قياس الزاوية المطلوبة = هـ ، ∵ المستقيمان متعامدان

∴ م = ١ ، طا هـ = ١ ∴ ق(∠هـ) = °٤٥

(٩) ∵ ميل أب = ٢ ، ميل ب جـ = ٢

، ∵ ميل أب = ميل ب جـ ، ب نقطة مشتركة بينهما

∴ النقط أ ، ب ، جـ تقع على استقامة واحدة

(١٠) ∵ النقط أ ، ب ، جـ تقع على استقامة واحدة

∴ ميل أب = ميل أ جـ

∴ ك − ١ = ٢ و منها : ك = ٣

(١١) ∵ ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = $م_1$ = $\frac{٤}{٣}$ ، ميل $\overleftrightarrow{\text{بحـ}}$ = $م_2$ = $-\frac{٣}{٤}$

، ∵ $م_1 \times م_2 = -١$ ∴ $\overleftrightarrow{\text{أب}} \perp \overleftrightarrow{\text{بحـ}}$

∴ △ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب

(١٢) ∵ ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = $م_1$ = -٣ ، ميل $\overleftrightarrow{\text{بحـ}}$ = $م_2$ = $\frac{ك - ٢}{-٩}$

، ∵ △ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب ∴ $\overleftrightarrow{\text{أب}} \perp \overleftrightarrow{\text{بحـ}}$

∴ $م_1 \times م_2 = -١$ ∴ $-٣ \times \frac{ك - ٢}{-٩} = -١$

و منها : ك = -١

(١٣) ∵ ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = ٤ ، ميل $\overleftrightarrow{\text{ءحـ}}$ = ٤

∴ ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = ميل $\overleftrightarrow{\text{ءحـ}}$ ∴ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ءحـ}}$ (١)

، ∵ ميل $\overleftrightarrow{\text{بحـ}}$ = $\frac{١}{٥}$ ، ميل $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ = $\frac{١}{٥}$

∴ ميل $\overleftrightarrow{\text{بحـ}}$ = ميل $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ∴ $\overleftrightarrow{\text{بحـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : الشكل أ ب حـ ء متوازى أضلاع

(١٤) ∵ ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = $-\frac{١}{٣}$ ، ميل $\overleftrightarrow{\text{ءحـ}}$ = $-\frac{١}{٣}$

∴ ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = ميل $\overleftrightarrow{\text{ءحـ}}$ ∴ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ءحـ}}$ (١)

، ∵ ميل $\overleftrightarrow{\text{بحـ}}$ = ٣ ، ميل $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ = ٣

∴ ميل $\overleftrightarrow{\text{بحـ}}$ = ميل $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ∴ $\overleftrightarrow{\text{بحـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ (٢)

، ∵ ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ × ميل $\overleftrightarrow{\text{بحـ}}$ = $-\frac{١}{٣} \times ٣ = -١$

∴ $\overleftrightarrow{\text{أب}} \perp \overleftrightarrow{\text{بحـ}}$ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن : الشكل أ ب حـ ء مستطيل

(١٥) ∵ ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = -١ ، ميل $\overleftrightarrow{\text{بحـ}}$ = $\frac{١}{٣}$

∴ ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ≠ ميل $\overleftrightarrow{\text{بحـ}}$

∴ النقط أ ، ب ، حـ ليست على استقامة واحدة

∴ النقط أ ، ب ، حـ هى رؤوس مثلث

، ∵ ميل $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ = $\frac{١}{٣}$ ∴ ميل $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ = ميل $\overleftrightarrow{\text{بحـ}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ // $\overleftrightarrow{\text{بحـ}}$ (١)

، ∵ ميل $\overleftrightarrow{\text{ءحـ}}$ غير معرف ∴ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ لا يوازى $\overleftrightarrow{\text{ءحـ}}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : الشكل أ ب حـ ء شبه منحرف

(١٦) ∵ ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = $-\frac{٢}{٣}$ ، ∵ $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{ءحـ}}$

∴ ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ = ميل $\overleftrightarrow{\text{ءحـ}}$ ∴ $\frac{س + ٣}{س - ٤} = -\frac{٢}{٣}$

و منها : س = ١

(١٧) [١] منفرجة [٢] $م_1 \times م_2 = -١$ [٣] $م_1 - م_2 = ٠$ [٤] $-\frac{٤}{٣}$

[٥] $\frac{٣}{٤}$ [٦] متعامدان [٧] ٤٥ [٨] ٣ [٩] $-\frac{٤}{٣}$

[١٠] ٤ [١١] ٣ [١٢] $\frac{١}{٣}$ [١٣] -٣

الدرس الرابع : معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله و طول الجزء المقطوع من محور الصادات

(١) [١] الميل = $\frac{٤}{٣}$ ، المستقيم يقطع من الجزء السالب لمحور الصادات ٣ وحدات

[٢] الميل = − ١/٢ ، المستقيم يقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات وحداتين

[٣] الميل = ٥/٢ ، المستقيم يقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات ٥ وحدات

[٤] الميل = − ١/٢ ، المستقيم يقطع من الجزء السالب لمحور الصادات وحداتين

(٢) [١] ص = ٣ س + ٥   [٢] ص = − ١/٢ س − ٣

[٣] ص = ٢/٥ س + حـ ، ∵ المستقيم يمر بالنقطة (٣ ، ٥)

فهى تحقق معادلته ∴ ٣ = ٢/٥ × ٥ + حـ

و منها : حـ = ١ ∴ المعادلة هى : ص = ٢/٥ س + ١

(٣) [١] ∵ المستقيم يمر بالنقطتين (١ ، ١) ، (٢ ، − ١)

∴ ميله = − ٢ ، معادلته هى : ص = − ٢ س + حـ

، ∵ (١ ، ١) تحقق المعادلة ∴ ١ = − ٢ × ١ + حـ

و منها : حـ = ٣ ∴ المعادلة هى : ص = − ٢ س + ٣

[٢] ميل المستقيم المعطى = ٢/٣ ، ∵ المستقيمان متوازيان

∴ ميل المستقيم المطلوب = ٢/٣

، معادلته هى : ص = ٢/٣ س + حـ

، ∵ المستقيم يمر بالنقطة (− ١ ، ٤)

∴ ٤ = ٢/٣ × (− ١) + حـ   و منها : حـ = ١٤/٣

∴ معادلة المستقيم المطلوب هى : ص = ٢/٣ س + ١٤/٣

[٣] ميل المستقيم المعطى = ٢ ، ∵ المستقيمان متعامدان

∴ ميل المستقيم المطلوب = − ١/٢

، معادلته هى : ص = − ١/٢ س + حـ

، ∵ المستقيم يمر بالنقطة (١ ، ٢)

∴ ٢ = − ١/٢ × ١ + حـ   و منها : حـ = ٥/٢

∴ معادلة المستقيم المطلوب هى : ص = − ١/٢ س + ٥/٢

[٤] ∵ المستقيم يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥° ∴ ميله = ١

، معادلته هى : ص = س + حـ

، ∵ المستقيم يمر بالنقطة (١ ، ٢)

∴ ٢ = ١ + حـ   و منها : حـ = ١

∴ معادلة المستقيم المطلوب هى : ص = س + ١

(٤) إحداثيي منتصف أب = (٢ ، ٤) ، ميل أب = ١

، ∵ المستقيم المطلوب ⊥ أب ∴ ميل المستقيم المطلوب = − ١

، معادلة المستقيم المطلوب هى : ص = − س + حـ

، ∵ (٢ ، ٤) تحقق المعادلة ∴ ٤ = − ٢ + حـ

و منها : حـ = ٦ ∴ المعادلة هى : ص = − س + ٦

(٥) إحداثيى منتصف $\overline{بحـ}$ و لتكن ء = (٢ ، ٢)

ميل $\overleftrightarrow{أء}$ = $-\frac{٨}{٣}$ ∴ معادلة $\overleftrightarrow{أء}$ هى : ص = $-\frac{٨}{٣}$ س + حـ

، ∵ ء (٢ ، ٢) تحقق المعادلة ∴ ٢ = $-\frac{٨}{٣}$ س + حـ

و منها : حـ = $\frac{٢٢}{٣}$ ∴ المعادلة هى : ص = $-\frac{٨}{٣}$ س + $\frac{٢٢}{٣}$

(٦) ∵ المستقيم يقطع ٤ وحدات طولية من الجزء الموجب لمحور السينات

∴ المستقيم يمر بالنقطة أ (٤ ، ٠) ، يكون : و أ = ٤ وحدات

∵ المستقيم يقطع ٩ وحدات طولية من الجزء الموجب لمحور الصادات

∴ المستقيم يمر بالنقطة ب (٠ ، ٩) ، يكون : و ب = ٩ وحدات

، ميله = $-\frac{٩}{٤}$ ، تكون معادلته هى : ص = $-\frac{٩}{٤}$ س + ٩

، مساحة △ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ و أ × و ب

= $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٩ = ١٨ وحدة مربعة

(٧) معادلة المستقيم المعطى هى : ص = $\frac{١}{٢}$ س + ١

∴ ميله = ميل المستقيم المطلوب = $\frac{١}{٢}$

∴ معادلة المستقيم المطلوب هى : ص = $\frac{١}{٢}$ س − ٣

(٨) ميل $\overleftrightarrow{أحـ}$ = $-\frac{٣}{٥}$ ، ∵ $\overleftrightarrow{أحـ}$ ⊥ $\overleftrightarrow{بء}$ ∵ ميل $\overleftrightarrow{بء}$ = $\frac{٥}{٣}$

∴ معادلة $\overleftrightarrow{بء}$ هى : ص = $\frac{٥}{٣}$ س + ك (١)

، ∵ م نقطة تقاطع القطرين ∴ م منتصف $\overline{أحـ}$

∴ م = (٢ ، ٣) و هى تحقق معادلة $\overleftrightarrow{بء}$

، بالتعويض في (١) ينتج : ك = − ٣

∴ معادلة $\overleftrightarrow{بء}$ هى : ص = $\frac{٥}{٣}$ س − ٣

(٩) [١] ∵ المستقيم يمر بالنقطتين (١ ، ١) ، (٢ ، ٣)

∴ ميله = ٢ ∴ معادلته هى : ص = ٢ س + حـ

، ∵ (١ ، ١) ∈ للمستقيم ∴ ١ = ٢ × ١ + حـ

و منها : حـ = − ١

∴ معادلة المستقيم هى : ص = ٢ س − ١

[٢] وحدة واحدة من الجزء السالب لمحور الصادات

[٣] ∵ (٣ ، أ) ∈ للمستقيم ∴ أ = ٢ × ٣ − ١ = ٥

(١٠) [١] $\frac{٢}{٣}$ [٢] ٢ [٣] ٣ [٤] ٢ [٥] ٣ [٦] ص = − ٢

[٧] س = ٢ [٨] ٦ [٩] ص = س [١٠] ٤ [١١] ٤٥

[١٢] ص = ٥ س + ٧ [١٣] $-\frac{٣}{٢}$ [١٤] $\frac{٢}{٣}$